La meraviglia di 77

Emilio Ambrisi

Nel mare infinito dei numeri le belle sorprese non mancano mai. Chi vi naviga non ha che da assuefarsi alla meraviglia. Ad esempio: ogni numero più grande di 77 è esprimibile come somma di interi positivi i cui reciproci hanno somma 1. È una vera gemma e come tale inserita in una lista di 24 risultati ritenuti tra i più belli dell'intera matematica. In modo più preciso:

Se n>77, esistono k numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ tali che:

$$1 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = n$$

$$a_1{}^{-1} + a_2{}^{-1} + a_3{}^{-1} + \cdots + a_k{}^{-1} = 1$$

Come si fa a determinare gli a_k? E ancora: esistono interi n minori di 77 che ammettono siffatte partizioni?

Sì: n=11. Infatti: 11=2+3+6 e $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

Se si raddoppiano 2, 3 e 6 si ha:

$$22 = 4 + 6 + 12 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$$

Ovvero, aggiungendo rispettivamente 2 e $\frac{1}{2}$,

$$24 = 2 + 4 + 6 + 12 \quad \text{e}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

Anche 24 ammette una partizione come 11 e allo stesso modo $50 = 2 \cdot 24 + 2$ e $102 = 2 \cdot 50 + 2$ e così proseguendo. Più in generale, se n è un intero che è esprimibile come somma di interi positivi i cui reciproci hanno somma 1 anche l'intero $m = 2n + 2$ gode della stessa proprietà.

Ma $\frac{1}{2}$ si può ottenere anche sommando $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{78} + \frac{1}{91}$ per cui : se n è un intero che è somma di interi positivi i cui reciproci hanno somma 1 è tale anche l'intero $M = 2n + 179$.