Tema: Fattorizzazione dei polinomi.
di Antonino Giambò

1. La fattorizzazione dei polinomi è uno degli argomenti più studiati a livello di primo biennio di scuola superiore. Io stesso me ne sono occupato in un articolo pubblicato su "Periodico di matematiche" (N. 1/2013). Qui voglio riprendere proprio quell'articolo per ulteriori riflessioni e approfondimenti.

Incomincio raccontando un episodio realmente accaduto che riporto fedelmente ma utilizzando nomi di fantasia.

Maria è un'alunna brava e studiosa che frequenta la 2ª classe del Liceo di una cittadina italiana. È alle prese con il seguente quesito a scelta multipla con una sola alternativa corretta:

> Sono assegnati i seguenti binomi nell'indeterminata x:
>
> $$[A]\ x^3+a^3,\quad [B]\ x^3-a^3,\quad [C]\ x^4+a^4,\quad [D]\ x^4-a^4,$$
>
> dove a è un parametro razionale. Uno solo dei binomi NON è fattorizzabile. Quale?

Maria capisce subito che le alternative [A], [B], [D] sono da escludere dal momento che i corrispettivi binomi sono fattorizzabili. Ne desume che l'unica alternativa corretta è [C]. Vale a dire che il binomio x^4+a^4 non è fattorizzabile. E, di fatto, anche il suo prof la pensa allo stesso modo.

Il ragionamento di Maria non fa una grinza. Ella non poteva rispondere diversamente da come ha risposto.

Purtroppo il quesito è formulato male dal momento che **non è specificato l'ambito in cui è richiesta la fattorizzazione**. Probabilmente era sottinteso che l'ambito fosse il campo razionale, ma sarebbe stato comunque preferibile specificarlo dal momento che il binomio x^4+a^4, non fattorizzabile in quel campo, lo è invece nel campo reale. Si ha infatti:

$$x^4+a^4=x^4+a^4+2a^2x^2-2a^2x^2=(x^2+a^2)^2-\left(ax\sqrt{2}\right)^2=\left(x^2+a^2+ax\sqrt{2}\right)\left(x^2+a^2-ax\sqrt{2}\right).$$

Ma si può aggiungere qualche altra considerazione.

Nel testo del quesito si precisa che a è un parametro razionale ed è bene che ciò sia stato detto. Infatti, se per esempio fosse $a=q\sqrt{2}$, dove q è un parametro razionale, si avrebbe:

$$x^4+a^4=(x^2+a^2+2qx)(x^2+a^2-2qx).$$

Il che dimostra che, in questo caso, il binomio x^4+a^4 è fattorizzabile nel campo razionale, come lo è x^4-a^4, mentre non lo sono ovviamente né x^3+a^3 né x^3-a^3.

> Detto per inciso, il caso particolare in cui $q=1$ e quindi $a=\sqrt{2}$, per cui il binomio x^4+a^4 diventa x^4+4, secondo quanto sostiene Y. Perelman (i), sembra essere stato studiato per la prima volta dalla matematica francese Marie Sophie Germain (1776-1831).

2. Una fattorizzazione piuttosto elementare è quella delle seguenti espressioni (ii):

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2,\quad (ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

Si dimostrano infatti abbastanza agevolmente le seguenti identità:

[1] $$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

[2] $$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

> Questa identità, sia nella forma [1] sia nella forma [2], è conosciuta come "identità di Brahmagupta-Fibonacci", ma pare che fosse già nota al matematico alessandrino Diofanto (III sec. d.C.). Fu comunque riscoperta dal matematico indiano Brahmagupta (VII sec.) e figura nel *Liber Quadratorum* di Leonardo Fibonacci (1175-1235), pubblicato nel 1225.
>
> Come accennato, per noi è assai facile fattorizzare le due precedenti espressioni. Ma non era così a quell'epoca, in un'epoca cioè in cui non esisteva ancora il calcolo simbolico e tutto doveva essere espresso in forma retorica, cioè a parole, ed era necessaria pertanto una notevole capacità intuitiva.

Le due identità, qualora siano lette a membri invertiti e le lettere rappresentino numeri naturali, sono spesso enunciate in questa forma o in una equivalente:

Il prodotto di due numeri, ciascuno dei quali è la somma dei quadrati di due numeri naturali, può essere espresso, **in due modi differenti**, *come somma di quadrati di numeri naturali.*

Per esempio, il numero $(2^2+3^2)(2^2+5^2)=13\cdot29=377$ è evidentemente il prodotto di due numeri, ciascuno dei quali è la somma dei quadrati di due numeri naturali. In tale numero, con riferimento alle identità sopraddette, è $a=2$, $b=3$, $c=2$, $d=5$. Per cui, in base alla [1] e alla [2], si ha rispettivamente:

$$377 = (2\cdot2-3\cdot5)^2+(2\cdot5+3\cdot2)^2 = 11^2+16^2\,,$$
$$377 = (2\cdot2+3\cdot5)^2+(2\cdot5-3\cdot2)^2 = 19^2+4^2\,.$$

In verità, nell'*Aritmetica* di Diofanto (libro 2, questione 10), figura il seguente problema [iii]:

Scomporre un numero dato, composto di due quadrati, in altri due quadrati.

L'enunciato suddetto afferma dunque che questa scomposizione è possibile "in due modi differenti".

Ora, questo è certamente vero se non è escluso che ci possano essere altri modi di operare una tale scomposizione o che non ci sia alcun modo di farlo, ma è falso se "i due modi differenti" debbano intendersi nel senso che sono tutti e soli i modi possibili.

In effetti, l'enunciato afferma il vero se il prodotto dei due numeri, ciascuno dei quali è la somma dei quadrati di due numeri naturali, non è a sua volta il quadrato di un numero naturale e se inoltre è $a\neq b$ o $c\neq d$.

Se infatti fosse $a=b$ e $c=d$ allora, sia per la [1] sia per la [2], si avrebbe: $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(2ac)^2$. E pertanto il prodotto dei due numeri non sarebbe esprimibile come somma di due quadrati.

Se, d'altro canto, il prodotto dei due numeri fosse un quadrato perfetto, allora ci sarebbero più di due modi per esprimerlo come somma di due quadrati. Valga per tutti il seguente esempio, nel quale si ragiona sul numero $85^2=5^2\cdot17^2=(3^2+4^2)(8^2+15^2)$.

Procedendo con l'utilizzazione delle identità [1] e [2], dove, nel caso specifico, $a=3$, $b=4$, $c=8$, $d=15$, si trova rispettivamente:

$$85^2 = (3\cdot8-4\cdot15)^2+(3\cdot15+4\cdot8)^2 = 36^2+77^2;$$
$$85^2 = (3\cdot8+4\cdot15)^2+(3\cdot15-4\cdot8)^2 = 84^2+13^2.$$

Ma, senza coinvolgere le due identità, si ha pure:

$$85^2 = 5^2\cdot17^2 = (3^2+4^2)\cdot17^2 = (3\cdot17)^2+(4\cdot17)^2 = 51^2+68^2.$$
$$85^2 = 5^2\cdot17^2 = 5^2\cdot(8^2+15^2) = (5\cdot8)^2+(5\cdot15)^2 = 40^2+75^2.$$

3. Una fattorizzazione meno semplice della precedente è quella del seguente polinomio:

$$P(x,y,z) = x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x),$$

che deve essere scomposto in un prodotto di polinomi di 1° grado con coefficienti nel campo razionale.

La fattorizzazione richiesta è la seguente:

$$(x-y)\,(y-z)\,(z-x).$$

Ma come ci si arriva? Insomma, quali passaggi bisogna effettuare per ottenerla?

Ebbene, volendo descrivere tutti i passaggi algebrici necessari per ottenere il risultato indicato, bisogna ricorrere ad un artificio e precisamente, dopo avere sviluppato il polinomio, la chiave per la sua fattorizzazione consiste nel sommare e sottrarre ad esso il monomio xyz. Ragion per cui, il polinomio diventa:

$$P(x,y,z) = x^2z-x^2y+y^2x-y^2z+z^2y-z^2x+xyz-xyz\,.$$

Da qui, associando opportunamente i termini, si ottiene in successione:

$$P(x,y,z = (x^2z-x^2y-z^2x+xyz)+(y^2x-y^2z+z^2y-xyz) =$$
$$= x(xz-xy-z^2+yz)+y(yx-yz+z^2-xz) = x[y(z-x)-z(z-x)]+y[x(y-z)-z(y-z)] =$$
$$= x(z-x)(y-z)+y(z-y)(z-x) = x(z-x)(y-z)-y(y-z)(z-x) = (x-y)(y-z)(z-x).$$

4. La fattorizzazione di un polinomio può essere utile in molte circostanze. Una di esse si presenta nella risoluzione di esercizi come questi:

a) È dato il seguente numero: $N=4n^4+3n^2+1$, dove n è un qualsiasi numero naturale. Dimostrare che, per ogni $n\neq0$, N è un numero composto oppure, viceversa, dimostrare che questo non è vero.
b) È dato il seguente numero: $N=4n^4+1$, dove n è un qualsiasi numero naturale. Dimostrare che esiste uno ed un solo valore di n per il quale N è un numero primo.
c) Il prodotto di 4 numeri naturali consecutivi, comunque scelti, richiede l'aggiunta di un ulteriore numero per diventare un quadrato perfetto: qual è questo numero?
d) Dimostrare che $a^2+b^2>ab$, essendo a, b numeri reali qualsiasi, purché non entrambi nulli.

Soffermiamoci sulla loro risoluzione.

a) Si ha:
$$N=4n^4+3n^2+1=4n^4+3n^2+1+n^2-n^2=\left(2n^2+1\right)^2-n^2=\left(2n^2+n+1\right)\left(2n^2-n+1\right).$$
E questo è sufficiente per concludere che, per ogni n non nullo, N è un numero composto.
A titolo di esempio:
per $n=1$: $N=8=4\times2$; per $n=2$: $N=77=11\times7$.

b) Si costata subito che, per $n=0$, $N=1$ (non è un numero primo) e, per $n=1$, $N=5$ (è un numero primo).
Si tratta allora di dimostrare che N non è un numero primo per ogni $n>1$.
Ora, si ha:
$$N=4n^4+1=4n^4+1+4n^2-4n^2=\left(2n^2+1\right)^2-4n^2=\left(2n^2+2n+1\right)\left(2n^2-2n+1\right).$$
E questo prova effettivamente che, per $n>1$, il numero N è un numero composto.
A titolo di esempio:
per $n=2$: $N=65=5\times13$; per $n=3$: $N=325=5^2\times13$.

c) Il prodotto di 4 numeri naturali consecutivi può essere espresso in questo modo: $n(n+1)(n+2)(n+3)$.
Sviluppando, si trova:
$$N=n^4+6n^3+11n^2+6n.$$
O anche, dopo qualche tentativo:
$$N=(n^2+3n+1)^2-1.$$
Si desume che al numero N bisogna aggiungere 1 affinché diventi un quadrato perfetto. E questo anche se $n=0$.
A titolo di esempio:
per $n=1$: $N=1\times2\times3\times4=24$, $N+1=25=5^2$; per $n=2$: $N=2\times3\times4\times5=120$, $N+1=121=11^2$.

d) Siccome il primo membro è certamente positivo, se uno (uno soltanto) dei due numeri a, b è nullo, certamente il primo membro supera il secondo, essendo questo secondo membro uguale a 0. Ugualmente se i due numeri a, b sono discordi, nel qual caso il secondo membro è negativo.
Rimane da esaminare il caso in cui i due numeri a, b sono entrambi positivi. Per questo basta tener presente la nota formula $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$. Ebbene, siccome evidentemente $(a-b)^2\geq0$, allora $a^2+b^2\geq2ab$ e, pertanto, essendo certamente $2ab>ab$, anche in questo caso risulta $a^2+b^2>ab$.

5. Mi soffermo adesso su un'applicazione di una particolare fattorizzazione, che a molti può apparire banale e forse lo è. Dico subito che si tratta dell'applicazione della seguente formula: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Ne vado a mostrare l'applicazione in due situazioni.

- La prima consiste nel costatare che la formula permette di calcolare rapidamente il valore di espressioni numeriche come le seguenti: 105^2-104^2, 105^2-103^2. Si ha infatti:
  - $105^2-104^2=(105+104)(105-104)=209\times1=209$;
  - $105^2-103^2=(105+103)(105-103)=208\times2=416$.
- La seconda situazione fa vedere come la formula possa tornare utile in particolari fattorizzazioni di numeri naturali. Due esempi.

- $1596=1600–4=40^2–2^2=(40+2)(40–2)=42\times 38=(2\times 3\times 7)(2\times 19)=2^2\times 3\times 7\times 19$;
- $2016=2025–9=45^2–3^2=(45+3)(45–3)=48\times 42=(2^4\times 3)(2\times 3\times 7)=2^4\times 3^2\times 7$.

6. Nell'*Arithmetica* di Diofanto (iv) figura la seguente proprietà:

Esistono quaterne di numeri razionali a, b, c, d tali che $a^3–b^3=c^3+d^3$.

Ovviamente Diofanto la enuncia a parole e, quantunque si riferisca a numeri generali, la utilizza e la verifica in casi particolari. Della questione si occupa anche Pierre de Fermat (1601-1665) (v).

La proprietà può essere effettivamente verificata in generale ed un modo per farlo è di assumere:

[3] $a=3n^3+3n^2+2n+1,\ b=3n^3+3n^2+2n,\ c=3n^2+2n+1,\ d=n^3$,

dove n è un qualsiasi numero razionale.

In realtà la proprietà vale anche se i numeri sono reali o addirittura complessi.

In effetti, qualunque sia n, risulta:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=27n^6+54n^5+63n^4+45n^3+21n^2+6n+1\,,$$
$$c^3+d^3=(c+d)(c^2-cd+d^2)=27n^6+54n^5+63n^4+45n^3+21n^2+6n+1\,.$$

A titolo di esempio, ma soffermandoci solamente su numeri naturali:

$$9^3-8^3=6^3+1^3;\quad 41^3-40^3=17^3+2^3\,;\quad 115^3-114^3=34^3+3^3.$$

Occorre precisare comunque che le quaterne di numeri ottenuti in base alle [3], pur essendo infinite, non sono le sole per le quali risulta soddisfatta la relazione in questione.

Valgano i seguenti esempi che esulano dall'applicazione delle formule [3]:

$$6^3-5^3=4^3+3^3,\quad 20^3-17^3=14^3+7^3.$$

Aggiungo che, trovata una quaterna di numeri a, b, c, d per i quali si abbia $a^3–b^3=c^3+d^3$, si possono ottenere da essa quante quaterne si vogliano, moltiplicando entrambi i membri (e quindi i suoi 4 termini) per il cubo di un qualunque numero naturale non nullo.

Per esempio, dall'uguaglianza $6^3–5^3=4^3+3^3$, moltiplicando entrambi i membri per 2^3, si ottiene:

$$6^3\cdot 2^3-5^3\cdot 2^3=4^3\cdot 2^3+3^3\cdot 2^3 \text{ vale a dire: } 12^3-10^3=8^3+6^3.$$

7. Concludo soffermandomi su una questione singolare, ancorché stranota. È correlata ad un celebre aneddoto riguardante il rapporto di amicizia e di collaborazione che sussisteva tra il matematico inglese Godfrey Harold Hardy (1877-1947) e il matematico indiano Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920) (vi). L'aneddoto è riferito da molti, ma riporto la versione raccontata da D. R. Hofstadter (vii), il quale ne attribuisce la paternità ad Hardy:

> Mi ricordo di una volta che stavo andando a trovarlo quando era ammalato a Putney. Avevo viaggiato col taxi n. 1729; osservai che il numero mi sembrava insignificante e che speravo non fosse un cattivo presagio. "No", replicò "è un numero molto interessante: è il più piccolo numero che si può esprimere come somma di due cubi in due modi diversi".

In effetti: $1729=9^3+10^3=12^3+1^3$.

Ramanujan era veramente un abile calcolatore, Hardy lo definì un calcolatore prodigio dotato di insolita memoria. Ma da qui a trovare istantaneamente quella risposta ce ne corre. Il fatto vero era che Ramanujan se ne era già occupato e conosceva pertanto la soluzione.

I numeri che hanno la proprietà di potersi esprimere come somma di due cubi in due modi diversi, proprio in onore dei due matematici, sono denominati *numeri di Hardy-Ramanujan* o anche *numeri taxi*.

In realtà, il problema di trovare numeri siffatti era noto da tempo. Tanto per dire, era noto sia a Fermat (viii) sia a Bernard Frénicle de Bessy (1605 ca.-1675). Ma Ramanujan ha dimostrato che esistono infiniti numeri naturali che possono esprimersi come somma di due cubi in due modi diversi.

In particolare, dati i numeri a, b, c, d, affinché risulti $a^3+b^3=c^3+d^3$, una modalità è quella di porre:

[4] $a=6n^2+8n+6,\ b=3n^2–5n–5,\ c=6n^2+4n+4,\ d=3n^2+11n+3$,

dove n è un qualsiasi numero naturale purché $n\geq 3$, altrimenti sarebbe $b<0$.

Di fatto, si verifica che:

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2–ab+b^2\right)=243n^6+729n^5+1890n^4+2565n^3+1650n^2+489n+91\ ,$$
$$c^3+d^3=(c+d)\left(c^2–cd+d^2\right)=243n^6+729n^5+1890n^4+2565n^3+1650n^2+489n+91\ .$$

Per esempio: $84^3+7^3=70^3+63^3=593.047$, ottenuto per $n=3$.

Di nuovo, come per le formule [3], occorre precisare che i numeri ottenuti in base alle [4], pur essendo infiniti, non sono i soli che si possano esprimere come somma di due cubi in due modi diversi.

E fra questi c'è proprio il numero 1729, come anche il numero 4104, essendo $4104=15^3+9^3=16^3+2^3$.

Come nel caso esaminato nel paragrafo precedente, una volta trovato un numero taxi, si possono ottenere da esso quanti numeri taxi si vogliano: basta moltiplicarlo per il cubo di un numero naturale non nullo.

Per esempio, dal numero taxi 1729 si ottiene il numero $1729·2^3$, che è ancora un numero taxi Si ha infatti:

$$1729·2^3=9^3·2^3+10^3·2^3=12^3·2^3+1^3·2^3,\ \text{ vale a dire: }\ 13.832=18^3+20^3=24^3+2^3.$$

Per la cronaca, esistono numeri che si possono esprimere come somma di due cubi in più di due modi differenti, ma non ce ne occupiamo.

---

i Yakov Perelman, *Algebra ricreativa*, RBA Italia, 2008, pag. 110.

ii Lewis Carroll, *Un racconto aggrovigliato e I problemi del cuscino*, RBA Italia, 2008, pagg. 147 e 192-193.

iii Pierre de Fermat, *Osservazioni su Diofanto*, Torino, Bollati Boringhieri, Ristampa 2017, pag. 3

iv Joan Gómez Urgellès, *Diofanto*, RBA Italia, 2017, pag. 35.

v Pierre de Fermat, op. cit., pagg. 13-16.

vi Chi fosse interessato ad avere notizie approfondite sui due matematici può trovarle in:
Robert Kanigel, *L'uomo che vide l'infinito*, Milano, Rizzoli, 2003,
oppure, ma in misura più stringata, in:
Juan José Rué Perna, *Ramanujan*, RBA Italia, 2017.

vii Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: un'Eterna Ghirlanda Brillante*, Milano, Adelphi, 1990, pag. 609.

viii Pierre de Fermat, op.cit., pagg. 3 e 15.