Tema: Numeri di Catalan e … altro.
di Antonino Giambò

1. Tutti coloro che si occupano di matematica, o quasi tutti, non ignorano i numeri di Catalan. Sarebbe pertanto inutile parlarne ancora. Ma lo voglio fare ugualmente per descrivere una modalità particolarmente interessante di ottenerli ed anche per mostrare alcuni esempi, quantunque noti, nei quali compare proprio la successione di questi numeri. Uno di tali esempi offre poi lo spunto per altre considerazioni.

Siccome i numeri di Catalan sono stati così denominati in onore di un matematico non certo famosissimo, almeno in Italia, mi soffermo prima di tutto per alcuni brevi cenni sulla biografia di questo signore.

Eugène Charles Catalan nacque a Bruges, in Belgio, nel 1814. Il padre era un gioielliere francese e in Francia, a Parigi, e precisamente all'*École Polytechnique*, Catalan fece i suoi studi di matematica e vi si diplomò. Ed ancora in Francia, in una scuola della cittadina di Châlons-sur-Marne, insegnò matematica. In realtà il nome di questa città, prima della Rivoluzione francese, era Châlons-en-Champagne e questo nome riprese a partire dal 1998.

Dal 1938, in seguito ai buoni uffici del suo amico Joseph Liouville (1809-1882), Catalan ebbe l'incarico di docente di *Geometria descrittiva* presso la stessa *École Polytechnique*, ma decise di far ritorno definitivamente in Belgio nel 1865 e qui fu assunto come docente di *Analisi matematica* all'Università di Liegi.

Morì a Bruges nel 1894.

I suoi contributi alla matematica vanno dallo studio delle equazioni differenziali alle serie di potenze, dalle ricerche sugli integrali multipli a quelle di geometria differenziale, dalla teoria dei numeri al calcolo combinatorio.

Fu proprio nell'affrontare un problema di combinatoria che si trovò ad introdurre la successione di quei numeri che portano il suo nome. Questo accadde nel 1838.

In realtà, occorre precisarlo, la successione di quei numeri era già nota da tempo, essendo stata trovata dal matematico ungherese Jan Andrej Segner (1704-1777) e studiata pure dal grande Leonhard Euler (1707-1783).

2. Eulero scoprì la successione di quelli che sarebbero stati chiamati numeri di Catalan nel tentativo, peraltro riuscito, di risolvere il seguente problema:

Trovare in quanti modi differenti un poligono convesso può essere diviso in triangoli
mediante diagonali che non s'intersecano se non in qualche vertice del poligono.

Per esempio, se il poligono è un quadrilatero vi sono 2 modi differenti di dividerlo in triangoli (figura 1), se è un pentagono ve ne sono 5 (figura 2), se è un esagono ve ne sono 14 (figura 3).

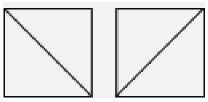


figura 1

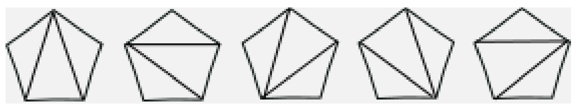


figura 2

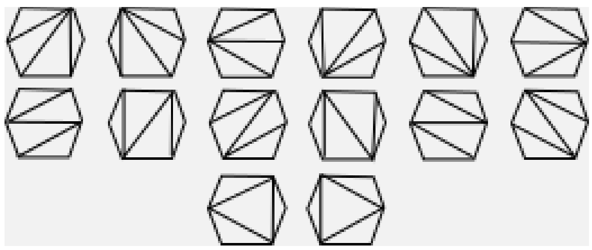


figura 3

La successione in questione è la seguente:

$$\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{5},\ \mathbf{14},\ \mathbf{42},\ \mathbf{132},\ \mathbf{429},\ \ldots\ .$$

Ci sono varie maniere per spiegare come essa venga fuori e qual è l'espressione del suo termine generale C_n. Orbene, ne ho scelto uno che prende le mosse dal celebre triangolo aritmetico e fornirò del termine C_n sia un'espressione analitica sia la forma ricorsiva.

Il riferimento più antico al "triangolo aritmetico", di cui si ha conoscenza, risale al secolo XI con l'opera del matematico cinese Jia Xian (1010-1070 ca.).

Forse era conosciuto dai matematici indiani, dai quali l'avrebbe appreso Omar Khayyam (1050 ca. – 1122), matematico e poeta arabo, che ne studiò per primo alcune caratteristiche.

Un altro matematico cinese, Chu Shih-chieh (1249-1314 ca.), ne parla nell'opera *SSu-yüan yü-chien* (*Prezioso specchio dei quattro elementi*) del 1303.

Il matematico tedesco Michael Stifel (1487 ca. - 1567) se ne occupa in una sua opera, *Aritmetica integra*, del 1544.

Niccolò Fontana, detto Tartaglia (1505 ca. - 1557), lo descrive in maniera articolata nella sua opera *General trattato dei numeri e misure*, del 1556, tanto che il triangolo, perlomeno in Italia, è sovente denominato "triangolo di Tartaglia".

Ma chi, per primo, trattò del "triangolo aritmetico" in maniera approfondita e completa fu Blaise Pascal (matematico, fisico e filosofo francese, 1623-1662) nell'opera *Traité du triangle arithmétique*, di circa 36 pagine, completata nel 1654, ma pubblicata postuma, nel 1665.

Per il nostro scopo il triangolo aritmetico è costruito come nella figura sottostante (figura 4).

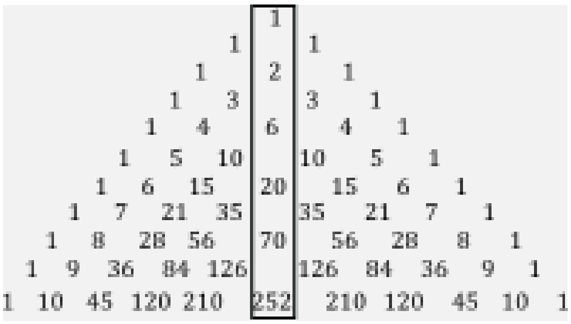


figura 4

Fermiamo la nostra attenzione sui numeri della colonna centrale (evidenziata in figura):

$$1,\ 2,\ 6,\ 20,\ 70,\ 252,\ \ \dots$$

e dividiamoli ordinatamente per i numeri:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ \dots;$$

otteniamo i numeri:

$$\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{5},\ \mathbf{14},\ \mathbf{42},\ \ \dots .$$

Sono per l'appunto i numeri che costituiscono la **successione dei numeri di Catalan**.

3. Per trovare l'espressione analitica del termine generale C_n di tale successione conviene scrivere i numeri della colonna centrale del triangolo aritmetico sotto forma di coefficienti binomiali, in questo modo:

$$\binom{0}{0},\ \binom{2}{1},\ \binom{4}{2},\ \binom{6}{3},\ \binom{8}{4},\ \binom{10}{5},\ \ \dots\ ,\ .$$

Questo significa che il numero della colonna suddetta, corrispondente al generico naturale n, è $b_n=\binom{2n}{n}$.

Per ottenere il termine generale C_n della successione dei numeri di Catalan bisogna dividere b_n per $n+1$.

Questo termine è dunque:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\ \text{ con } n \geq 0.$$

O anche:

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}.$$

Infatti:

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}.$$

Per ricavare la forma ricorsiva di questa successione bisogna osservare anzitutto che per $n>0$ si ha:

$$C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

D'altro canto risulta:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{(2n-1)!\,(2n)}{(n-1)!\,n\cdot(n-1)!\,n} = \frac{(2n-2)!\,(2n-1)(2n)}{\left((n-1)!\right)^2 n^2},$$

$$\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} = \frac{(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2}.$$

Si ha pertanto:

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{(2n-2)!\,(2n-1)(2n)}{\left((n-1)!\right)^2 n^2}}{\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2}} = \frac{2(2n-1)}{n+1}.$$

Di conseguenza, se $n>0$, si ha:

$$C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1}\,C_{n-1}.$$

In definitiva, ecco la forma ricorsiva cercata:

$$C_n = \begin{cases} 1 \ \text{ se } \ n=0 \\ \dfrac{2(2n-1)}{n+1}\,C_{n-1} \ \text{ se } \ n>0 \end{cases}$$

4. Il numero C_n di Catalan risolve effettivamente il problema di Eulero per il poligono di $N=n+2$ lati. Questo può essere facilmente verificato nei seguenti casi:

- $n=1$ ($N=3$, triangolo): il numero dei modi in cui il triangolo può essere diviso dalle sue diagonali è $C_1=1$; in realtà in questo caso non ci sono diagonali ma c'è un triangolo;
- $n=2$ ($N=4$, quadrilatero): il numero dei modi è $C_2=2$;
- $n=3$ ($N=5$, pentagono): il numero dei modi è $C_3=5$;
- $n=4$ ($N=6$, esagono): il numero dei modi è $C_4=14$.

5. Dicevamo di Catalan che avrebbe introdotto i numeri che avrebbero portato il suo nome affrontando un problema di combinatoria.

Ora, il problema in questione è davvero curioso. Lo andiamo ad enunciare:

> *Sia assegnata una successione di n lettere in un determinato ordine. Si introducono n–1 coppie di parentesi (una aperta e l'altra chiusa) in modo che all'interno di ogni coppia ci siano due raggruppamenti e due soltanto. I raggruppamenti possono essere formati da due lettere consecutive o da una lettera ed un raggruppamento o da due raggruppamenti. Bisogna calcolare in quanti modi distinti possono essere introdotte le coppie di parentesi.*

Alcuni esempi, supponendo che le lettere assegnate siano quelle dell'alfabeto, ovviamente nell'ordine consueto: a, b, c, d, … , e tenendo presente altresì che l'ordine va mantenuto anche nei vari raggruppamenti:

- se $n=2$ e le lettere sono a, b, si ha un solo modo di introdurre una coppia di parentesi: (ab);
- se $n=3$ e le lettere sono a, b, c, ci sono 2 modi di introdurre 2 coppie di parentesi: $\big(a(bc)\big)$, $\big((ab)c\big)$;
- se $n=4$ e le lettere sono a, b, c, d, ci sono 5 modi di introdurre 3 coppie di parentesi: $\big((ab)(cd)\big)$, $\Big(a\big(b(cd)\big)\Big)$, $\Big(\big((ab)c\big)d\Big)$, $\Big(a\big((bc)d\big)\Big)$, $\Big(\big(a(bc)\big)d\Big)$.

In generale, se le lettere sono in numero di n ci sono C_{n-1} modi di introdurre $n-1$ coppie di parentesi, dove C_{n-1} è per l'appunto un numero di Catalan.

6. I due esempi mostrati non sono le sole situazioni in cui compaiono i numeri di Catalan. Ce ne sono molte altre, in numero che non ha nulla da invidiare a quello delle situazioni in cui compaiono i numeri di Fibonacci, che, com'è noto, sono veramente tante. Ne descriverò una terza.

Prima però ritengo interessante segnalare che nel 1961 il matematico neozelandese Henry George Forder (1889-1981) stabilì in modo elegante una corrispondenza biunivoca fra la suddivisione dei poligoni in triangoli e l'introduzione di coppie di parentesi in una successione ordinata di lettere.

Mi permetto di illustrare questa corrispondenza nel caso del quadrilatero (figura 5) e nel caso del pentagono (figura 6).

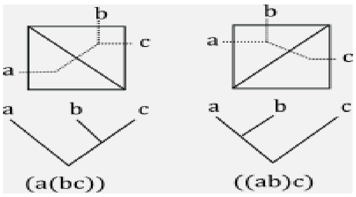


figura 5

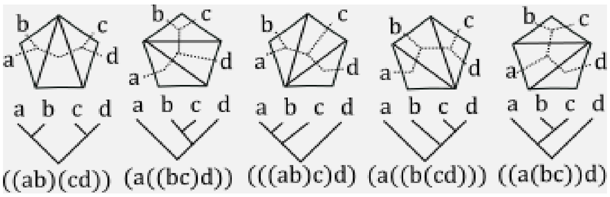


figura 6

7. Occupiamoci adesso della terza situazione in cui sono presenti i numeri di Catalan. Ancora una volta lo facciamo enunciando un problema:

È data una scacchiera $n \cdot n$, nella quale sono oscurate le caselle situate al di sopra e a sinistra della diagonale principale che va da sinistra in basso a destra in alto. Una pedina è situata nella casella A posta in basso a sinistra e può muoversi solamente verso destra e verso l'alto, ma occupando caselle non oscurate. Bisogna calcolare quanti sono i possibili cammini che portano la pedina dalla casella A alla casella B situata nell'angolo in alto a destra.

Due esempi per chiarire:

- se n=3 i cammini possibili sono 2 (figura 7);
- se n=4 i cammini possibili sono 5 (figura 8).

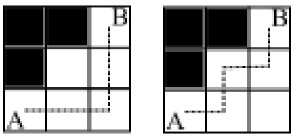


figura 7

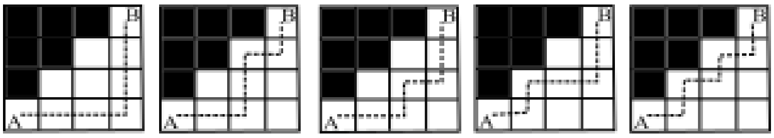


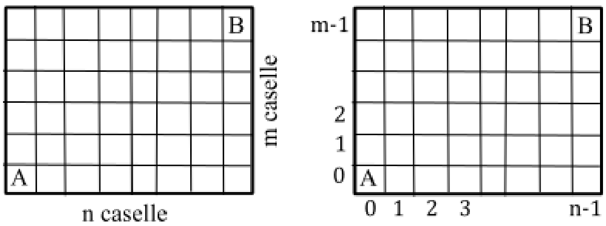
figura 8

In generale, se la scacchiera ha n lati, i cammini possibili sono dati dal numero di Catalan C_{n-1}.

8. L'ultima situazione descritta ci offre lo spunto per una domanda:

Se nessuna delle caselle della scacchiera è oscurata, quanti sono i possibili itinerari che portano la pedina dalla casella A situata nell'angolo inferiore sinistro alla casella B situata nell'angolo superiore destro? Supponendo ovviamente che la pedina possa muoversi solamente verso destra o verso l'alto.

Rispondiamo a questo interrogativo considerando, invece di una scacchiera quadrata $n \cdot n$, una scacchiera rettangolare $n \cdot m$, vale a dire una scacchiera avente per base n caselle e per altezza m caselle (figura 9a).



(a) (b)

figura 9

Contrassegniamo inoltre le caselle della scacchiera come se fossero quelle di una rappresentazione tabulare, utilizzando in orizzontale la successione di numeri $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ e in verticale la successione di numeri $0, 1, 2, 3, \dots, m-1$ (figura 9b).

Possiamo assimilare la situazione al lancio di una moneta TESTA-CROCE, identificando l'evento "la pedina si sposta di una casella verso destra" con l'evento "esce TESTA" e l'evento "la pallina si sposta di una casella verso l'alto" con l'evento "esce CROCE".

Si può costatare intanto che sono necessari $(n-1)+(m-1)=n+m-2$ passi perché, in uno qualsiasi dei possibili percorsi, la pedina si porti da A a B. S'intende che, in ogni passo, la pedina si può spostare o nella casella posta alla sua destra o in quella poste immediatamente sopra.

Si tratta allora di stabilire in quanti casi, sul totale $n+m-2$ lanci della moneta, escono $n-1$ TESTE ed $m-1$ CROCI, indipendentemente dall'ordine in cui si presentano TESTA e CROCE.

Ora, è noto dal calcolo combinatorio che il numero di casi in cui, in $n+m-2$ lanci, l'evento "esce TESTA" si presenta $n-1$ volte (e, di conseguenza, l'evento "esce CROCE" si presenta $m-1$ volte) è uguale al numero $P_{n+m-2}^{(n-1,\ m-1)}$ delle permutazioni con ripetizione di $n+m-2$ oggetti, dei quali $n-1$ uguali fra loro ed $m-1$ uguali fra loro, vale a dire:

$$P_{n+m-2}^{(n-1,\ m-1)} = \frac{(n+m-2)!}{(n-1)!\ (m-1)!} = \binom{n+m-2}{n-1} = \binom{n+m-2}{m-1}.$$

È questo il numero dei possibili percorsi della pedina.

Evidentemente, se $n=m$ (scacchiera quadrata), questo numero, che indichiamo con J_n, è tale che:

$$J_n = \binom{2n-2}{n-1}.$$

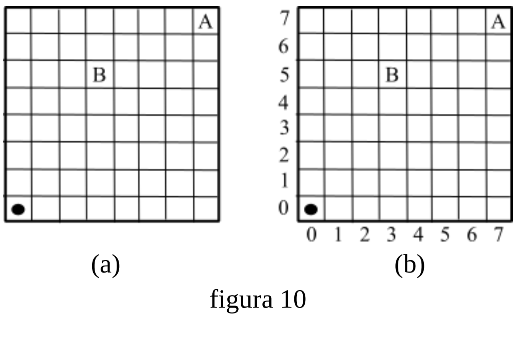
Vale a dire che, per $n \geq 1$, i possibili cammini che portano la pedina dall'angolo basso a sinistra all'angolo alto a destra, in una scacchiera quadrata di lato n, sono dati dalla seguente successione al variare di n:

$$\binom{0}{0},\ \binom{2}{1},\ \binom{4}{2},\ \binom{6}{3},\ \binom{8}{4},\ \binom{10}{5},\ \dots\ ,$$

ossia la medesima successione di numeri della colonna centrale del triangolo aritmetico (già evidenziati in figura 4).

9. I risultati ottenuti nel precedente paragrafo consentono di risolvere rapidamente un quesito assegnato nella sessione ordinaria 2016 degli esami di Stato dei Licei Scientifici. Questo il quesito:

Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura (figura 10a). Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



(a) (b)

figura 10

Considerato che in questo caso si ha $n=8$ e le successioni che contrassegnano la scacchiera, come fatto in figura 9b, sono entrambe formate dai numeri $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (figura 10b), i possibili cammini che portano la pedina da A a B sono in numero di $J_8 = \binom{14}{7}$.

D'altro canto, essendo la posizione B contrassegnata dalla coppia ordinata $(3, 5)$, i possibili cammini che passano per B sono esattamente in numero uguale ai possibili percorsi che, in una scacchiera rettangolare 4×6, portano la pedina dalla casella $(0, 0)$ alla casella $B(3, 5)$, vale a dire che sono in numero di $P_8^{(3,5)} = \binom{8}{3}$.

Ne consegue che la probabilità cercata è:

$$p = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{14}{7}} = \frac{\frac{8\times7\times6}{2\times3}}{\frac{14\times13\times12\times11\times10\times9\times8}{2\times3\times4\times5\times6\times7}} = \frac{7}{429} \approx 1{,}63\% \,.$$

Da quanto precede si capisce che questa formula può essere generalizzata. Precisamente:

È data una scacchiera quadrata di lato n. Si considerino tutti i possibili itinerari che una pedina può percorrere partendo dalla casella A posta in basso a sinistra fino alla casella B posta in alto a destra, nel presupposto che la pedina possa muoversi solamente verso destra e verso l'alto. Si consideri infine una generica casella S situata a destra della casella A dopo h posti e in alto rispetto ad essa dopo k posti. Ebbene, la probabilità che uno degli itinerari suddetti passi per S è la seguente:

$$p = \frac{\binom{h+k}{h}}{\binom{2n-2}{n-1}} \,.$$

Infatti, i possibili cammini che portano la pedina da A a B sono in numero di $\binom{2n-2}{n-1}$, mentre i possibili percorsi che passano per S sono esattamente quelli che, in una scacchiera rettangolare di base $h+1$ ed altezza $k+1$, portano la pedina dalla casella A alla casella S, ossia $\binom{h+k}{h}$.

Riferimenti bibliografici.

[1] **Martin Gardner**, *Viaggio nel tempo e altre stranezze matematiche*, RBA Italia, 2008.