Estratto dagli ATTI del Periodico di Matematiche
Presentatati al Convegno di Cattolica e pubblicati sugli ATTI del
Convegno di Paestum

Alberto Pavoncello

Un teorema generale di divisibilità per i polinomi

0. Notazioni

0.1 Si indicherà, come d'uso, con $\mathbb{R}[x]$ l'insieme dei polinomi in una variabile su $\mathbb{R}$ e con $\mathbb{R}(x)$ l'insieme delle funzioni razionali su $\mathbb{R}$.

0.2 Sia $f \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio in x a coefficienti in $\mathbb{R}$: esplicitamente si può indicare tale polinomio come

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} .$$

Si indicherà

con $\overline{f}$ il monomio di grado *minimo* a coefficiente a_i non nullo nella sommatoria precedente: è evidente che questo monomio può anche essere di grado nullo, cioè ridursi al termine noto di f, come potrà ridursi ad f se questi è costituito da un solo monomio a coefficiente non nullo;

con f^* l'espressione $f - \overline{f}$;

con f° *l'espressione* $\dfrac{f^*}{\overline{f}} = \dfrac{f-\overline{f}}{\overline{f}} = \dfrac{f}{\overline{f}} - 1.$

1. Lemma

Siano $f,g \in \mathbb{R}[x]$. $g/f \Longrightarrow \overline{g}/\overline{f}.$

Dimostrazione:

$$\text{Se } g/f \text{ esiste } h \in \mathbb{R}[x] \text{ tale che } f = gh.$$

Ma, per le definizioni precedenti,

$$f = f^* + \overline{f},\ g = g^* + \overline{g},\quad h = h^* + \overline{h}$$

e quindi

$$f^* + \overline{f} = (g^* + \overline{g})\ (h^* + \overline{h}) = g^*h^* + \overline{g}h^* + g^*\overline{h} + \overline{g}\overline{h}.$$

Il monomio di grado minimo a coefficiente non nullo al secondo membro è $\overline{g}\overline{h}$ quindi

$$\overline{f} = \overline{g}\overline{h}$$

cioè

$$\overline{g}/\overline{f}.$$

c.v.d.

2. Proposizione

Siano $f, g \in \mathbb{R}[x]$. $g/f \Longrightarrow g/(f^* - g^\circ\overline{f})$.

Dimostrazione:

Si supponga g/f. Se fosse falsa l'affermazione

$$g/(f^* - g^\circ\overline{f})$$

sarebbe

$$\frac{f^* - g^\circ\overline{f}}{g} \in \mathbb{R}(x),\quad \frac{f^* - g^\circ\overline{f}}{g} \notin \mathbb{R}[x].$$

Poiché g/f, esiste $h \in \mathbb{R}[x]$ tale che $f = gh$ e

$$\frac{f^* - g^\circ\overline{f}}{g} = \frac{f - \overline{f} - \left(\frac{g}{\overline{g}} - 1\right)\overline{f}}{g}$$

$$= \frac{gh - \overline{f} - \frac{g}{\overline{g}}\overline{f} + \overline{f}}{g}$$

$$= \frac{gh - \frac{g}{\overline{g}}\overline{f}}{g}$$

$$= h - \frac{\overline{f}}{\overline{g}}$$

e per il Lemma precedente risulterebbe

$$\frac{f^* - g^\circ\overline{f}}{g} \in \mathbb{R}[x] :$$

tale contraddizione dimostra l'asserto.

c.v.d.

3. Proposizione

Siano $f,g \in \mathbb{R}[x]$. $g/(f^* - g^\circ\overline{f})$ *e* $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in \mathbb{R}[x] \Longrightarrow g/f$.

Dimostrazione:

Si supponga $g/(f^* - g^\circ\overline{f})$. Allora esiste $h \in \mathbb{R}[x]$ tale che

$$f^* - g^\circ\overline{f} = hg$$