Tema: Il problema della divisione della posta.

di Antonino Giambò

1. In un precedente articolo, pubblicato su questa medesima rubrica (Cfr.: *Probabilità e pseudo-ragionamenti*), ho accennato al *problema della divisione della posta*.

La storia di questo problema e dei tentativi di risolverlo è invero lunga e variegata, ma non intendo occuparmi di questo, salvo qualche cenno che avrò modo di fare. Suggerisco, tuttavia, a chi volesse approfondire l'argomento, la lettura del seguente articolo di Silvio Maracchia: "Il problema delle parti e le origini del calcolo delle probabilità", inserito nel volume "L'endecasillabo matematico", pubblicato nel 1999, a cura della Mathesis, pagg. 205-239.

Qui è invece mia intenzione riprendere il problema per spiegare (a beneficio di quei pochi che non lo sapessero) come si possa ottenere una formula generale per la sua soluzione nel caso di due giocatori e di fare un cenno al caso di tre giocatori.

Enuncio prima di tutto il problema, per l'appunto in forma generale, nel caso di due giocatori:

> *Due persone – A e B – decidono di giocare alcune partite e depositano la stessa somma. In ogni partita vince l'uno o l'altro dei due giocatori, i quali hanno la stessa probabilità di vincita. Si aggiudica l'intera posta chi per primo arriva a vincere* n *partite. Ma, dopo un certo numero di partite, quando A ne ha vinte* n−a *e B ne ha vinte* n−b*, i due giocatori decidono di interrompere il gioco. Come deve essere suddivisa la posta?*

Dico subito che non interessa quante partite sono state vinte dai due giocatori, al momento dell'interruzione del gioco, ma quante ne mancano a ciascuno di loro per aggiudicarsi l'intera posta. È su questo che bisogna ragionare. Cosa, peraltro, spiegata ampiamente sia da Fermat [1] sia da Pascal [2], i quali dibatterono a lungo per via epistolare, nel corso dell'anno 1654, su questo problema, segnando di fatto la nascita del calcolo delle probabilità. In realtà i metodi di risoluzione del problema seguiti dai due scienziati sono diversi, ma giungono agli stessi risultati. Alla fine, però, prevalse il metodo di Fermat, come riconobbe lo stesso Pascal, il quale, ammirato dall'eleganza e dalla facilità della risoluzione che Fermat aveva fornito del problema, così si espresse in una lettera del 27 ottobre 1654:

> *Ammiro il vostro metodo sulla divisione delle parti, ancora di più ora che l'ho ben capito, questo metodo è interamente vostro e non ha niente in comune con il mio e arriva facilmente allo stesso risultato.*

Mi corre l'obbligo di segnalare che gli autori Jordi Deulofeu Piquet e Roger Deulofeu Batllori, nel libro "Pascal", edito nel 2017 da RBA Italia, indicano per questo pensiero, a pag. 97, la data del 29 luglio 1654.

In realtà, questa è la data della lettera di Pascal a Fermat, nella quale compare la prima soluzione a noi pervenuta del problema della divisione della posta. Ma non poteva contenere quel giudizio di Pascal su Fermat. Come poteva se ancora non tutto era stato chiarito?

Fermat

Pascal

[1] Pierre de Fermat, letterato e giurista francese, matematico per diletto, 1601-1665.

[2] Blaise Pascal, filosofo, matematico, fisico e filosofo francese, 1623-1662.

2. Occupiamoci dunque della risoluzione del problema generale nel caso di due giocatori.

- Incominciamo a calcolare il numero N di partite che dovrebbero essere giocate affinché si abbia la certezza che uno (uno soltanto, ovviamente) dei due giocatori si aggiudichi l'intera posta, vale a dire che arrivi a vincere n partite. Questo numero è il seguente:

$$N = a + b - 1 \,.$$

Infatti, affinché il giocatore A si aggiudichi l'intera posta dovrebbe vincere un numero a di partite, mentre nel contempo il giocatore B ne dovrebbe vincere al più $b-1$, insufficienti per la vittoria finale.

D'altro canto, se il giocatore A vincesse $a-1$ partite, non basterebbero per la vittoria finale, mentre in questo caso il giocatore B, vincendone b, si aggiudicherebbe l'intera posta.

- Calcoliamo ora il numero dei possibili esiti delle N partite, **come se** fossero effettivamente giocate.

Per esempio, se $a=1$ e $b=3$, per cui $N=3$, i possibili esiti sono i seguenti:

AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB,

dove con A è indicato l'evento "vince A" e con B l'evento "vince B". (Cosa che faremo sempre da qui in avanti).

Un grafo (figura 1), peraltro non indispensabile, può aiutare ad elencare questi possibili esiti.

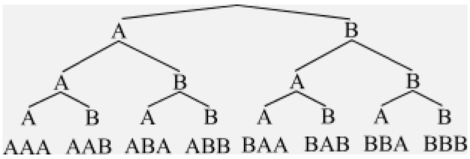

figura 1

Si può costatare che in quest'esempio i possibili esiti sono tanti quante le disposizioni con ripetizione dei 2 oggetti distinti A, B, presi a 3 a 3, ovvero in numero di $D'_{2,3}=2^3$.

Ebbene, questo vale in generale, quale che sia N. Pertanto: il numero dei possibili esiti delle N partite, **fingendo** che siano effettivamente giocate, è dato dal numero $D'_{2,N}$ delle disposizioni con ripetizione dei 2 oggetti distinti A, B, presi a N a N, vale a dire:

$$D'_{2,N} = 2^N \,.$$

- Andiamo a calcolare adesso quanti dei possibili esiti 2^N sono favorevoli ad A e quanti a B.

Supponiamo, per comodità, che sia $a \leq b$ e indichiamo con $F_A(a, b)$ il numero degli esiti favorevoli ad A e con $F_B(a, b)$ quello degli esiti favorevoli a B.

Incominciamo a costatare che, dei possibili 2^N esiti delle N partite, gli esiti favorevoli a B sono tutti e soli quelli in cui figurano al più $a-1$ vincite di A.

Per esempio, se $a=2$ e $b=3$, per cui $N=4$, i possibili $2^4=16$ esiti delle 4 partite da giocare sono i seguenti:

AAAA, AAAB, AABA, AABB, ABAA, ABAB, ABBA, ABBB,
BAAA, BAAB, BABA, BABB, BBAA, BBAB, BBBA, BBBB.

Anche adesso può far comodo un grafo (figura 2) che aiuti ad elencare questi possibili esiti.

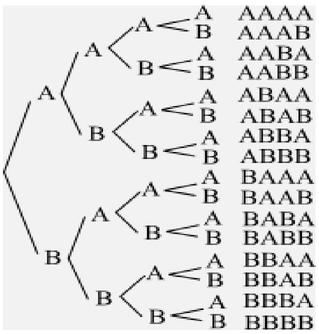

figura 2

Di questi, gli esiti favorevoli a B sono quelli in cui figura al più una vincita di A, ossia i seguenti esiti:

ABBB, BABB, BBAB, BBBA, BBBB.

Ora, il numero 5 di questi esiti può essere concepito come somma di due addendi, uno formato da una sola unità (corrispondente all'esito BBBB) ed uno formato da 4 unità (corrispondenti agli esiti ABBB, BABB, BBAB, BBBA). Il primo di essi si può interpretare come il numero delle permutazioni con ripetizione di 4 oggetti, di cui 0 uguali fra loro e 4 uguali fra loro; il secondo addendo si può interpretare come il numero delle permutazioni con ripetizione di 4 oggetti, di cui 1 uguali fra loro e 3 uguali fra loro. Gli esiti favorevoli a B sono pertanto in numero di $P_4^{(0,4)}+P_4^{(1,3)}$.

Estendendo questo ragionamento al caso generale, si dimostra che, dei possibili 2^N esiti delle N partite, quelli favorevoli a B, ovvero quelli in cui figurano al più a−1 vincite di A, sono dati dalla somma seguente:

$$P_N^{(0,N)} + P_N^{(1,N-1)} + P_N^{(2,N-2)} + \cdots + P_N^{(a-1,N-(a-1))},$$

dove $P_N^{(k,N-k)}$, con k=0,1,2,...,a−1, rappresenta il numero delle permutazioni con ripetizione di N oggetti, di cui k uguali fra loro ed N−k uguali fra loro. Pertanto, tenendo presente che:

$$P_N^{(k,N-k)} = \frac{N!}{k!\ (N-k)!},$$

risulta:

$$F_B(a,b) = \sum_{k=0}^{a-1} P_N^{(k,N-k)} = \sum_{k=0}^{a-1} \frac{N!}{k!\ (N-k)!}, \qquad F_A(a,b) = 2^N - F_B(a,b)\ .$$

- Abbiamo, a questo punto, tutti gli elementi per calcolare come deve essere ripartita la posta fra A e B. E anche, cosa però non necessaria e neanche richiesta, di calcolare le probabilità che hanno i due giocatori di aggiudicarsi l'intera posta.

Allora, indicate con $P_A(a,b)$ la probabilità di A e con $P_B(a,b)$ quella di B, si ha:

$$P_B(a,b) = \frac{F_B(a,b)}{2^N}, \qquad P_A(a,b) = 1 - P_B(a,b).$$

In conclusione, indicato con R(a,b) il rapporto fra le parti della posta spettanti ad A e quelle spettanti a B, si ha:

$$R(a,b) = \frac{F_A(a,b)}{F_B(a,b)} = \frac{P_A(a,b)}{P_B(a,b)}.$$

La tabella sottostante (tabella 1) riporta alcuni risultati. In essa non figurano casi in cui a=b, poiché in queste situazioni, banalmente, la posta va suddivisa in parti uguali.

Ad ogni buon conto, anche in questo caso il rapporto di suddivisione, che è ovviamente R(a,b)=1/1, può essere ottenuto applicando il ragionamento precedente.

a numero delle partite mancanti ad A per vincere l'intera posta	b numero delle partite mancanti a B per vincere l'intera posta	N numero delle partite da giocare per avere certezza di un vincitore	2^N numero dei possibili esiti delle N partite	$F_B(a,b)$ numero degli esiti favorevoli a B	$F_A(a,b)$ numero degli esiti favorevoli ad A	$P_B(a,b)$ probabilità di B di vincere l'intera posta	$P_A(a,b)$ probabilità di A di vincere l'intera posta	R(a,b) rapporto fra le parti spettanti ad A e quelli spettanti a B
1	**2**	2	4	1	3	1/4	3/4	**3/1**
1	**3**	3	8	1	7	1/8	7/8	**7/1**
2	**3**	4	16	5	11	5/16	11/16	**11/5**
1	**4**	4	16	1	15	1/16	15/16	**15/1**
2	**4**	5	32	6	26	3/16	13/16	**13/3**
3	**4**	6	64	22	42	11/32	21/32	**21/11**
1	**5**	5	32	1	31	1/32	31/32	**31/1**
2	**5**	6	64	7	57	7/64	57/64	**57/7**
3	**5**	7	128	29	99	29/128	99/128	**99/29**
4	**5**	8	256	93	163	93/256	163/256	**163/93**

tabella 1

3. Il metodo di Fermat può essere applicato, senza difficoltà sul piano concettuale ma con qualche fastidio sul piano pratico, al caso in cui i giocatori siano più di due.

In realtà, il metodo di Fermat nel caso di tre giocatori fu criticato da Roberval [3], il quale, seppure con una certa supponenza, si dichiarava disponibile ad accettarlo nel caso di due giocatori, ma mai di tre, appunto.

La sua critica fu comunicata a Fermat dall'amico Pascal (che a dire il vero nutriva ancora qualche dubbio sul metodo di Fermat) in una lettera del 24 agosto 1654. La risposta di Fermat, contenuta in una lettera del 29 agosto, altro non è che una difesa chiara e convincente del suo metodo, ribadita in una seconda lettera del 25 settembre.

Nella sua risposta (27 ottobre 1654) Pascal si dichiara pienamente soddisfatto.

Occupiamoci allora del problema nel caso di tre giocatori in situazioni particolari, ovviamente con il metodo di Fermat.

- Esempio 1. Al giocatore A manchi una sola partita per aggiudicarsi l'intera posta, così come al giocatore B, mentre ne manchino 2 al giocatore C.

Si capisce subito che al più dopo 2 partite si ha la certezza di avere un vincitore.

Gli esiti possibili di queste 2 partite sono tanti quante le disposizioni con ripetizione dei 3 oggetti distinti A, B, C, presi a 2 a 2, vale a dire: $D'_{3,2}=3^2=9$; e sono i seguenti:

AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC.

Un grafo (figura 3), ancorché non necessario, aiuta ad elencare questi esiti. Dei quali:

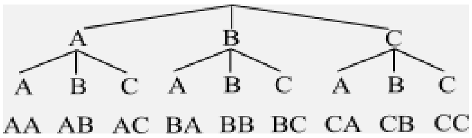

figura 3

- 4 sono favorevoli ad A: AA, AB, AC, CA; dunque: $F_A(1,1,2)=4$;
- 4 sono favorevoli a B: BA, BB, BC, CB; dunque: $F_B(1,1,2)=4$;
- al giocatore C è favorevole l'unico esito CC; dunque $F_C(1,1,2)=1$.

Bisogna pertanto dividere la posta in 9 parti uguali, assegnandone 4 a ciascuno dei giocatori A e B ed una al giocatore C. Si capisce poi che le probabilità che hanno i giocatori di aggiudicarsi l'intera posta sono le seguenti:

$$P_A(1,1,2)=\frac{4}{9},\quad P_B(1,1,2)=\frac{4}{9},\quad P_C(1,1,2)=\frac{1}{9}.$$

- Esempio 2. Al giocatore A manchi una sola partita per aggiudicarsi l'intera posta, mentre al giocatore B ne manchino 2, così come al giocatore C.

Questa volta, al più dopo 3 partite si ha la certezza di avere un vincitore.

Gli esiti possibili di queste 3 partite sono tanti quante le disposizioni con ripetizione dei 3 oggetti distinti A, B, C, presi a 3 a 3, vale a dire: $D'_{3,3}=3^3=27$; e sono i seguenti:

AAA, AAB, AAC, ABA, ABB, ABC, ACA, ACB, ACC,
BAA, BAB, BAC, BBA, BBB, BBC, BCA, BCB, BCC,
CAA, CAB, CAC, CBA, CBB, CBC, CCA, CCB, CCC.

Anche adesso può essere utile un grafo (figura 4) che aiuti ad elencare tutti questi esiti. Di essi:

- sono favorevoli ad A i seguenti 17:
  AAA, AAB, AAC, ABA, ABB, ABC, ACA, ACB, ACC,
  BAA, BAB, BAC, CAA, CAB, CAC,
  BCA, CBA; dunque: $F_A(1,2,2)=17$;
- sono favorevoli a B i seguenti 5:
  BBA, BBB, BBC,
  BCB, CBB; dunque: $F_B(1,2,2)=5$;
- infine, sono favorevoli a C i seguenti 5:
  CCA, CCB, CCC,
  CBC, BCC; dunque: $F_C(1,2,2)=5$.

[3] Gilles Personne de Roberval, matematico francese, 1602-1675.

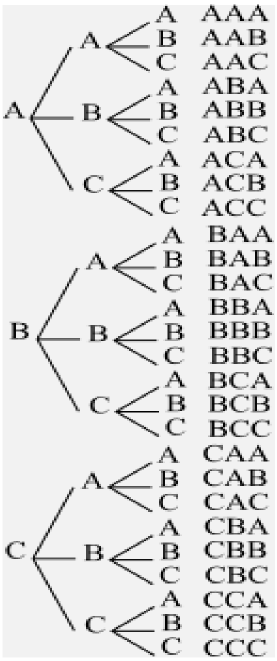

figura 4

Bisogna pertanto dividere la posta in 27 parti uguali, assegnandone 17 al giocatore A e 5 a ciascuno dei giocatori B e C.

Si capisce che le probabilità che hanno i giocatori di aggiudicarsi l'intera posta sono le seguenti:

$$P_A(1,2,2) = \frac{17}{27}\,,\;\; P_B(1,2,2) = \frac{5}{27}\,,\;\; P_C(1,2,2) = \frac{5}{27}\,.$$

Detto per inciso, questo secondo esempio è proprio quello contestato da Roberval, il quale, nel presupposto che si sarebbero giocate tre partite, considerava equivalenti per esempio i due esiti ACC e CCA; cosa che avrebbe mostrato due vincitori.

Ma non è così, come spiegò Fermat in modo esauriente, chiarendo che la disposizione ACC è favorevole ad A ma non a C (una volta che A ha vinto la prima partita è di fatto inutile giocare le altre due), mentre la disposizione CCA è favorevole a C ma non ad A (una volta che C ha vinto le prime due partite è inutile giocare la terza).

4. Il procedimento seguito nei due esempi mostrati sopra è basato sull'elenco di tutti i possibili esiti. Ora, se questo è irrilevante nel primo caso, trattandosi di pochi esiti, già nel secondo caso e maggiormente nel caso di più esiti, la cosa può diventare indigesta. Fortunatamente si può ovviare a ciò, con un procedimento alternativo, che non richiede l'elenco dei possibili esiti ma solo il loro numero.

Lo applichiamo dapprima alla risoluzione dell'esempio 2 e, subito dopo, al nuovo esempio 3.

- Riguardo all'esempio 2, sappiamo già che al più dopo 3 partite si ha la certezza di avere un vincitore e che gli esiti possibili di queste 3 partite sono in numero di 27. Andiamo allora a stabilire quanti di questi esiti sono favorevoli, nell'ordine, ai giocatori C, B, A.

- Esiti favorevoli al giocatore C:
  - disposizioni con ripetizione dei tre oggetti A, B, C, presi a 3 a 3, che cominciano con la coppia CC: sono esattamente 3;
  - inoltre, le 2 disposizioni CBC e BCC.

  Complessivamente, gli esiti favorevoli a C sono in numero di $3+2=5$.
- Esiti favorevoli al giocatore B:
  - esattamente tanti quanti quelli favorevoli a C e cioè 5, mancando a B lo stesso numero di partite che mancano a C per aggiudicarsi l'intera posta.
- Esiti favorevoli al giocatore A:
  - basta sottrarre dal numero degli esiti possibili la somma degli esiti favorevoli a C e a B, vale a dire: $27-(5+5)=17$.

Tutto, ovviamente, come con l'altro procedimento.

- Esempio 3. Al giocatore A manchi una sola partita per aggiudicarsi l'intera posta, al giocatore B ne manchino 2 e al giocatore C ne manchino 3.

In questo caso, al più dopo 4 partite si ha la certezza di avere un vincitore (4).

[4] In generale, se ai giocatori A, B, C mancano rispettivamente a, b, c partite per aggiudicarsi l'intera posta, il numero di partite che devono essere giocate affinché si abbia la certezza di avere un vincitore è $N=a+b+c-2$.

Gli esiti possibili di queste 4 partite sono tanti quante le disposizioni con ripetizione dei 3 oggetti distinti A, B, C, presi a 4 a 4, vale a dire: $D'_{3,4}=3^4=81$.

Per stabilire quanti di questi esiti sono favorevoli a ciascuno dei tre giocatori seguiamo lo stesso ragionamento descritto nel precedente esempio, senza preoccuparci di elencare tutti i possibili esiti, cominciando dal giocatore C e proseguendo con B ed A, vale a dire cominciando dal giocatore che è più lontano dalla vittoria finale, per finire con quello al quale mancano meno vincite parziali per aggiudicarsi l'intera posta.

- Esiti favorevoli al giocatore C:
  - disposizioni con ripetizione dei tre oggetti A, B, C, presi a 4 a 4, che cominciano con la terna CCC: sono esattamente 3;
  - inoltre, le 3 disposizioni CCBC, CBCC, BCCC.

  Complessivamente, gli esiti favorevoli a C sono in numero di $3+3=6$: $F_C(1,2,3)=6$.
- Esiti favorevoli al giocatore B:
  - disposizioni con ripetizione dei tre oggetti A, B, C, presi a 4 a 4, che cominciano con la coppia BB: il loro numero è uguale a quello delle disposizioni con ripetizione dei tre oggetti A, B, C, presi a 2 a 2, vale a dire $3^2=9$;
  - disposizioni con ripetizione dei tre oggetti A, B, C, presi a 4 a 4, che incominciano con una delle terne BCB o CBB: in ognuno dei due casi le disposizioni sono evidentemente in numero di 3; il numero di queste disposizioni è pertanto uguale a 6;
  - inoltre, le 3 disposizioni CCBB, CBCB, BCCB: $F_B(1,2,2)=6$.

  Complessivamente, gli esiti favorevoli a B sono in numero di $9+6+3=18$: $F_B(1,2,3)=18$.
- Esiti favorevoli al giocatore A:
  - basta sottrarre dal numero degli esiti possibili la somma di quelli favorevoli a C e a B, vale a dire: $81-(18+6)=57$: $F_A(1,2,3)=57$.

Bisogna pertanto dividere la posta in 81 parti uguali, assegnandone 57 al giocatore A, 18 al giocatore B e 6 al giocatore C.

Si capisce poi che le probabilità che hanno i giocatori di aggiudicarsi l'intera posta sono le seguenti:

$$P_A(1,2,3)=\frac{57}{81},\ \ P_B(1,2,3)=\frac{18}{81},\ \ P_C(1,2,3)=\frac{6}{81}.$$

Anche con questo procedimento, tuttavia, le cose si complicano quando aumentano i valori di a, b, c. E, di fatto, sono già complicate quando si ha $a=2$, $b=2$, $a=3$. Ma la chiudiamo qui.

> *Signore ... ho ricevuto ieri sera, da parte del Signor de Carcavi* [5]*, la vostra lettera sulle parti, che ammiro così tanto da non poterlo esprimere. [...]*
> *Il vostro metodo è sicurissimo ed è quello che per primo mi è venuto in mente quando ho iniziato a pensare a questa ricerca, ma ... ho trovato ... un altro metodo che ... mi piacerebbe esporvi ... .*
>
> [Dalla lettera di Pascal a Fermat, datata 29 luglio 1654, in risposta evidentemente ad una lettera di Fermat, che però è andata perduta, nella quale lo stesso Fermat doveva aver proposto una qualche soluzione del problema.
> Secondo gli storici, il problema era sorto in seguito ad un quesito posto a Pascal da Antoine Gombaud, cavaliere di Méré (1607-1684). Pascal avrebbe riproposto la questione a Fermat e questi avrebbe risposto con la lettera che è andata perduta.
> Nella stessa lettera succitata Pascal esprime il suo compiacimento nel costatare che i suoi risultati coincidevano con quelli di Fermat, nonostante la diversità dei metodi, e lo esprime con una frase passata alla storia: *Vedo chiaramente che la verità è la stessa a Tolosa come a Parigi*.]

[5] Pierre de Carcavi, matematico francese, 1600-1684.