PROBLEMA 1.

Un corpo, avente la temperatura T_0, una volta che sia stato immerso in un ambiente mantenuto a temperatura costante T_1, con $T_0>T_1$, riduce via via la sua temperatura. Il tasso di diminuzione della temperatura T del corpo rispetto al tempo t è regolato dalla seguente legge (*legge del raffreddamento di Newton*):

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_1)\,,$$

dove k è una costante dipendente dalle caratteristiche del sistema corpo-ambiente.

1) Si dimostri che la legge che esprime l'andamento di T in funzione di t è del tipo seguente:

$$T = a\,e^{-b\,t} + c\,, \quad (e \approx 2{,}71),$$

e si trovino i valori delle costanti a, b, c, espressi per mezzo di k, T_0, T_1.

2) Posto che t sia misurato in secondi e T in gradi centigradi, in quali unità sono misurate le costanti a, b, c e il tasso dT/dt ?

Ammesse tali unità di misura, determinare la legge $T=T(t)$ sapendo che $k=1/50$ e che nell'istante iniziale supposto uguale a 0, sia $T(0)=40$ e $T'(0)=-0{,}36$.

3) Si studi la funzione $T=T(t)$ così trovata e se ne disegni il grafico in un idoneo riferimento cartesiano, prescindendo dalla questione fisica; determinare in particolare gli intervalli in cui la funzione cresce o decresce.

4) Si calcoli quanto tempo impiega il corpo, dall'istante della sua immersione nell'ambiente:

a) a ridurre la sua temperatura del 10%;

b) a raggiungere la temperatura dell'ambiente medesimo.

RISOLUZIONE.

1) Bisogna integrare l'equazione differenziale assegnata. Si può procedere per variabili separate:

$$\frac{dT}{T - T_1} = -k\,dt, \text{ da cui, integrando, segue: } \ln(T - T_1) = -kt + \ln A\,,$$

essendo A la costante d'integrazione. Pertanto:

$$T = A\,e^{-k\,t} + T_1\,.$$

Considerato che, nell'istante $t=0$ la temperatura del corpo è T_0, si ha: $T_0=A+T_1$ ossia: $A=T_0-T_1$.

In definitiva, la legge cercata è la seguente:

$$T = (T_0 - T_1)\,e^{-k\,t} + T_1$$

e si costata che effettivamente è del tipo indicato dalla traccia. Si costata inoltre che si ha:

$$a = T_0 - T_1\,, \quad b = k\,, \quad c = T_1\,.$$

2) Posto che t sia misurato in secondi (s) e T in gradi centigradi (°C), si desume che la costante $a=T_0-T_1$ è misurata in gradi centigradi, $b=k$ nell'inverso del secondo (s^{-1}), $c=T_1$ in gradi centigradi; infine dT/dt è misurato in gradi centigradi su secondo (°C/s).

In base ai dati della traccia, considerato che $T'=-k(T_0-T_1)\,e^{-k\,t}$ si ha:

$$k = \frac{1}{50}\,s^{-1} = 0{,}02\,s^{-1}, \quad T(0) = T_0 = 40\text{ °C}, \quad T'(0) = -k(T_0 - T_1) = -0{,}36\text{ °C/s}.$$

Dall'ultima relazione, tenendo presenti le due precedenti, a conti fatti segue: $T_1=22$ °C.

Ne consegue che la legge di raffreddamento si particolarizza nel modo seguente:

$$T = 18\,e^{-0{,}02\,t} + 22\,.$$

3) Si studia la funzione precedente, prescindendo dalla questione fisica.

La funzione è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e risulta $T(t)>0$ per ogni $t\in\mathbb{R}$; come dire che il grafico della funzione è situato tutto nel semipiano $T>0$.

Tale grafico interseca invece l'asse delle ordinate (equazione $t=0$) nel punto A(0,40).

Esaminiamo il suo comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{t\to-\infty} T(t) = +\infty\,, \quad \lim_{t\to+\infty} T(t) = 0\,.$$

Intanto possiamo concludere che l'asse delle ascisse è un asintoto destro per il grafico della funzione. Siccome poi $\lim_{t\to-\infty} \frac{T(t)}{t} = +\infty$, dobbiamo concludere che tale grafico presenta un ramo parabolico sinistro nella direzione dell'asse delle ordinate.
Dall'esame della derivata prima della funzione risulta poi che $T'(t)<0$ per ogni $t\in\mathbb{R}$; il che implica che il grafico della funzione è sempre decrescente. Risulta pure che $T''(t)>0$ per ogni $t\in\mathbb{R}$; il che implica che il grafico volge sempre la concavità per l'alto.
Il grafico della funzione è disegnato nella figura sottostante (figura 1).

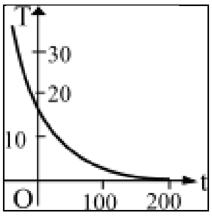

figura 1

4) La temperatura iniziale del corpo è di 40 °C. Ridotta del 10% diventa 36 °C. Deve essere dunque:

$$36 = 18\,e^{-0,02\,t} + 22\,.$$

Da qui, una volta risolta l'equazione, si ottiene:

$$-0,02\,t = \ln\frac{7}{9}.$$

Siccome, per mezzo di uno strumento di calcolo automatico: $\ln(7/9)\approx-0,25$, allora si ha:

$$t = \frac{0,25}{0,02} = 12,5\ (s).$$

Pertanto, il corpo riduce la sua temperatura del 10%, dal momento in cui è immerso nell'ambiente, in 12,5 secondi.

Affinché il corpo raggiunga la temperatura dell'ambiente, che come abbiamo visto sopra è di 22 °C, deve risultare:

$$22 = 18\,e^{-0,02\,t} + 22 \quad \text{ossia:} \quad e^{-0,02\,t} = 0.$$

Il che accade solo per $t\to+\infty$. Questo in teoria. In pratica dopo circa 200 secondi, come del resto s'intuisce dalla stessa figura 1. In effetti si ha:

$$T(200) = 18\,e^{-0,02\times200} + 22 \approx 22,3\ (°C).$$