PROBLEMA 2.

Si consideri il seguente polinomio nell'indeterminata t:

$$\frac{1}{4}t^3 + p\,t + q\,,$$

dove p, q sono parametri reali. Si sa che -2 è un suo zero.

1) Calcolare:
   a) la somma degli altri due zeri del polinomio (considerati nel campo complesso);
   b) i valori di q per i quali i tre zeri del polinomio sono reali.
2) Posto che la legge seguente:

$$v = \frac{1}{4}t^3 + p\,t + q \quad (\text{con } 0 \le t \le 6)$$

   indichi la velocità v (espressa in metri al secondo) di un corpo che si muove su una retta r in funzione del tempo t (espresso in secondi):
   a) determinare tale legge nel caso in cui l'accelerazione cui è sottoposto il corpo è nulla nell'istante $t' = 2$ s e disegnarne l'andamento in un conveniente sistema di riferimento cartesiano.
   b) determinare anche la legge del moto, supponendo che nell'istante $t = 0$ il corpo si trovi nell'origine O sulla retta r, sulla quale si suppone fissato un riferimento cartesiano (OU), e descrivere per sommi capi come si svolge il moto del corpo.
   c) calcolare inoltre quanto cammino ha percorso il corpo dall'istante iniziale a quello in cui inverte il suo moto sulla retta r e il cammino percorso nell'intervallo [0,6].
3) Spiegare in modo esauriente perché esso ripassa per O una ed un'altra volta soltanto in un istante compreso fra il 5° e il 6° secondo dopo la partenza da O.

RISOLUZIONE.

1) Considerato che uno zero del polinomio è -2, utilizzando lo schema di Ruffini e tenendo presente che deve essere $-2-2p+q=0$, il polinomio può essere scritto in questo modo:

$$\frac{1}{4}(t+2)(t^2 - 2t + 4p + 4)\,.$$

Ragion per cui gli altri due zeri del polinomio assegnato sono gli zeri del seguente polinomio di 2° grado in t: $t^2-2t+4p+4$.

In virtù di una delle note formule di Viète [(1)], indicate con t_1 e t_2 i due zeri, risulta: $t_1+t_2=2$.

Riguardo alla seconda questione di questo primo punto, affinché le radici dell'equazione assegnata siano tutte e tre reali deve risultare non negativo il discriminante dell'equazione di 2° grado $t^2-2t+4p+4=0$, vale a dire che deve essere: $p \le -3/4$.

Di conseguenza, essendo $p=\frac{-2+q}{2}$, deve risultare: $\frac{-2+q}{2} \le -\frac{3}{4}$, ossia: $q \le \frac{1}{2}$.

2) L'accelerazione a del corpo è tale che: $a = v'(t) = (3/4)\,t^2 + p$. Di conseguenza, essendo $a(2) = 3 + p$, imponendo che sia $a(2) = 0$, deve essere $p = -3$. D'altro canto, è sempre $-2-2p+q=0$, per cui si ha: $q=-4$. Nel caso specifico, pertanto, la legge che esprime la velocità del corpo in funzione del tempo è la seguente:

$$v = \frac{1}{4}t^3 - 3\,t - 4 \quad (\text{con } 0 \le t \le 6).$$

Il suo grafico si ottiene facilmente (figura 1). Esso evidenzia, fra l'altro, che $v(0)=0$ per t=4 (s).

[1] Se fossero conosciute le formule di Viète per i polinomi di 3° grado, si saprebbe che, nel caso specifico, deve essere $t_1+t_2+t_3 = 0$ e perciò, essendo $t_3 = -2$, deve essere $t_1+t_2 = 2$. In mancanza di queste formule si può procedere come abbiamo descritto.

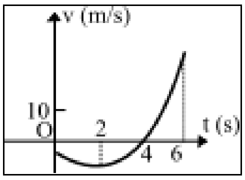

figura 1

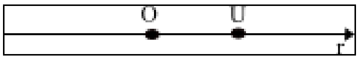

figura 2

La legge del moto x=x(t) si ottiene tenendo presente che deve essere contemporaneamente:

$$x = \int v(t)\, dt \ , \ \ x(0) = 0 \, .$$

Si trova facilmente la seguente legge:

$$x = \frac{1}{16} t^4 - \frac{3}{2}\, t^2 - 4\, t \, .$$

Dall'esame di questa legge e dal grafico della velocità si desume che il corpo si muove sulla retta r – sulla quale si suppone fissato un riferimento cartesiano (OU) (figura 2) – partendo dal punto O e muovendosi verso posizioni di ascissa negativa (insomma verso sinistra) con velocità crescente in valore assoluto fino all'istante $t=2$ (s) allorché la sua accelerazione si annulla, dopo di che la velocità del corpo tende a diminuire in valore assoluto e si annulla nell'istante $t=4$ (s), quando il corpo inverte il suo moto e incomincia a muoversi nel senso delle ascisse positive (cioè verso destra) e procede in questo verso fino all'istante finale $t=6$ (s).

Dall'istante t = 0 all'istante t = 4 s, non essendo intervenute inversioni di marcia, il cammino c_1 percorso dal corpo è tale che:

$$c_1 = |\, x(4) - x(0)\, | = 24 \text{ (m)}.$$

Per calcolare il cammino c che ha percorso il corpo nell'intervallo [0,6], basta aggiungere al cammino precedente quello percorso dall'istante $t=4$ (s) all'istante $t=6$ (s), che è il seguente:

$$c_2 = x(6) - x(4) = 27 \text{ (m)} \, .$$

Pertanto:

$$c = c_1 + c_2 = 24 + 27 = 51 \text{ (m)}.$$

3) Siccome il corpo, dal momento in cui inverte il moto, incomincia a muoversi verso destra e sempre si muoverà in questo verso senza invertire più il senso di marcia, ci sarà un istante ed uno solo nel quale esso ripasserà da O. Per dimostrare che questo istante è compreso fra 5 s e 6 s, basta calcolare $x(5)$ e $x(6)$ e costatare che $x(5)<0$ e $x(6)>0$. Di fatto:

$$x(5) = -\frac{295}{16}, \quad x(6) = 3.$$