QUESITI.

1) I signori Rossi hanno tre figli, due dei quali sono maschi. Calcolare la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio.

2) Calcolare la derivata della funzione $f(x)=|x-1|+x$ e tracciare sullo stesso piano il grafico della funzione e quello della sua derivata. Fornire ampia giustificazione delle operazioni eseguite.

3) Sono dati due numeri reali positivi a, b. Dimostrare che la loro media armonica non supera la loro media geometria che, a sua volta, non supera la loro media aritmetica.

4) È data la seguente successione di termine generale a_n, definita per ricorsione:

$$a_n = \begin{cases} 2 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + 2n \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

a) Trovare l'espressione analitica di a_n.

b) Calcolare il limite della successione a_n/n^2.

5) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola avente il fuoco nel punto F ed equazione $y^2=4x$. Indicato con P il suo punto di ordinata 2, si trovi la pendenza della retta n perpendicolare alla tangente alla parabola in P (questa retta n è denominata *normale* alla parabola in P). Indicato con Q un punto situato sulla parallela all'asse della parabola condotta per P ($x_Q > x_P$), si verifichi che la retta n è bisettrice dell'angolo $F\widehat{P}Q$.

In realtà, questo fatto – ossia che la normale alla parabola in un suo punto P è bisettrice dell'angolo $F\widehat{P}Q$ – vale per ogni punto P della parabola ed ha un importante significato fisico, collegato al fenomeno della propagazione delle onde alla superficie di un liquido. Si dica qual è questo significato fisico.

6) La base maggiore di un trapezio è uguale ai $3/2$ della minore. La retta r che congiunge i punti medi dei lati obliqui divide il trapezio in due poligoni. Si considerino i solidi generati da tali poligoni in una rotazione completa intorno alla retta r e si calcoli il rapporto tra il volume del solido maggiore e quello del minore.

7) Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), è assegnata la retta di equazioni:

$$x - 2y - 3z = 0, \quad 2x - y - z + 2 = 0 .$$

Trovare le componenti (a,b,c) di un vettore avente la stessa direzione della retta.

8) Come si sa dallo studio della Fisica, un circuito elettrico (figura 1) con una resistenza R ed un'induttanza L, soggetto ad una forza elettromotrice costante V, è attraversato da una corrente costante $i=V/R$. Tuttavia, se si interrompe bruscamente il circuito (il commutatore viene trasferito molto rapidamente da A a B), la corrente i non sparisce istantaneamente ma dura ancora qualche tempo, ancorché brevissimo, variando rispetto al tempo t secondo la legge seguente:

$$-L\frac{di}{dt} = Ri .$$

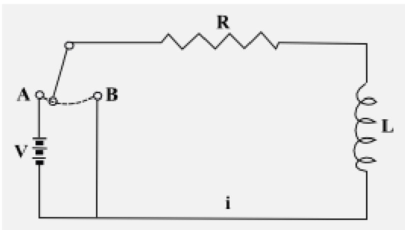

figura 1

Posto che sia:

R=50 ohm , L=2,5 henry, V=12 volt,

verificare che è i=0 praticamente dopo 0,4 secondi dall'apertura del circuito.

RISOLUZIONE.

Q1) Indichiamo con le lettere M ed F "figlio maschio" e "figlia femmina". Se non ci fossero limitazioni al sesso dei tre figli, si potrebbero presentare i seguenti casi (nell'ordine dal figlio maggiore al figlio minore):

MMM MMF MFM MFF FMM FMF FFM FFF.

Siccome si sa che due dei tre figli sono maschi, sono da escludere i seguenti 4 eventi:

MFF FMF FFM FFF

Nei 4 eventi che rimangono, cancelliamo due M perché appunto due dei figli sono maschi. Si ottengono i seguenti casi: M - F - F - F.

In 1 caso su 4 il figlio rimanente è maschio: probabilità $1/4$.

Q2) Conviene esplicitare la funzione e calcolarne la derivata. Si ottiene facilmente:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{per } x\ge 1\\ 1 & \text{per } x<1\end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases}2 & \text{per } x\ge 1\\ 0 & \text{per } x<1\end{cases}$$

Nella figura sottostante (figura 2) sono rappresentate sullo stesso piano cartesiano (Oxy) la funzione f(x) (spezzata di colore blu) e la sua derivata $f'(x)$ (spezzata di colore rosso).

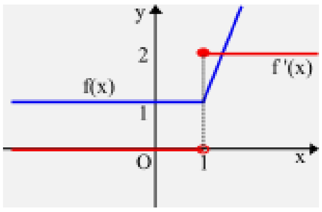

figura 2

Q3) Siano a, b due numeri reali positivi e siano m_a, m_g, m_{ar} rispettivamente le loro medie aritmetica, geometrica e armonica. Vale a dire:

$$m_a=\frac{a+b}{2}\,,\quad m_g=\sqrt{ab}\,,\quad m_{ar}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}\,.$$

Vogliamo dimostrare che risulta: $m_a \ge m_g \ge m_{ar}$ Si ha in sequenza:

$(a-b)^2 \ge 0 \;\rightarrow\; (a-b)^2+4ab \ge 4ab \;\rightarrow\; a^2+b^2+2ab \ge 4ab \;\rightarrow\; (a+b)^2 \ge 4ab \;\rightarrow$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b \ge 2\sqrt{ab} \;\rightarrow\; \dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \;\rightarrow\; m_a \ge m_g \\ 1 \ge \dfrac{4ab}{(a+b)^2} \;\rightarrow\; ab \ge \dfrac{4(ab)^2}{(a+b)^2} \;\rightarrow\; \sqrt{ab} \ge \dfrac{2ab}{a+b} \;\rightarrow\; m_g \ge m_{ar} \end{array}\right.$$

In definitiva: $m_a \ge m_g \ge m_{ar}$.

Ovviamente, solo se a=b, risulta: $m_a=m_g=m_{ar}$.

Q4) Incominciamo a costatare che risulta:

$a_1=2,$
$a_2=2+2\cdot 2=2+4,$
$a_3=2+4+2\cdot 3=2+4+6,$
$\ldots,$
$a_n=2+4+6+\ldots+2n.$

a_n è dunque uguale alla somma dei primi n numeri naturali pari a partire da 2. E siccome questa somma è la somma di n numeri in progressione aritmetica di primo termine 2 e ragione 2, risulta:

$$a_n=n\cdot\frac{2+n}{2}=n\,(n+1)\,.$$

Risulta poi facilmente:

$$\lim \frac{a_n}{n^2}=1\,.$$

Q5) Il fuoco della parabola è il punto F(1,0), mentre il punto P ha coordinate (1,2). (Lasciamo a chi legge il disegno del grafico). Si trova che la pendenza della normale n alla parabola in P è -1. Si costata facilmente che l'angolo $F\widehat{P}Q$ è un angolo retto e che la retta n è la sua bisettrice. E questo vale qualunque sia P.

Il fatto che la normale alla parabola in un suo qualsiasi punto P è bisettrice dell'angolo $F\widehat{P}Q$ ha un interessante significato fisico, il seguente: se si fa incidere sulla parte concava di un ostacolo parabolico, posto in un ondoscopio, un treno d'onde circolari con centro nel fuoco della parabola, dovendo l'angolo di riflessione essere uguale all'angolo di incidenza, esse si riflettono diventando onde rettilinee che si propagano nella direzione dell'asse della parabola.

Q6) Indichiamo con ABCD il trapezio (figura 3) e con M ed N rispettivamente i punti medi dei lati obliqui AD e BC. È noto che $MN=\frac{1}{2}$ (AB+DC) ed inoltre che MN è parallela alle basi del trapezio, ragion per cui MN divide il trapezio in due trapezi. Diciamo ora H e K le proiezioni ortogonali di M ed N su AB e con R ed S le proiezioni ortogonali di D e C su MN.

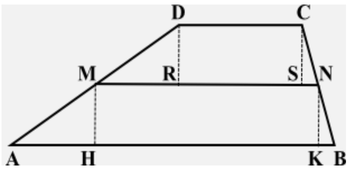

figura 3

Indichiamo poi con V_1 il volume del solido generato dal trapezio ABNM in una rotazione completa intorno alla retta MN e con V_2 il volume del solido generato nella stessa rotazione dal trapezio MNCD. Costatiamo anzitutto che il primo solido è costituito dal cilindro generato da AB incavato da due coni, uno generato da AM e l'altro generato da BN, mentre il secondo è costituito dal cilindro generato da DC sormontato da due coni, uno generato da MD e l'altro generato da CN. Costatato inoltre che i triangoli AHM e MRD sono uguali e parimenti lo sono i triangoli KBN e SNC, si trova agevolmente che:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{3\,\overline{AB}-\left(\overline{AH}+\overline{KB}\right)}{3\,\overline{DC}+\left(\overline{AH}+\overline{KB}\right)}=\frac{2\,\overline{AB}+\overline{MN}}{2\,\overline{DC}+\overline{MN}}=\frac{2\,\overline{AB}+\frac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2}}{2\,\overline{DC}+\frac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2}}=\frac{5\,\overline{AB}+\overline{DC}}{\overline{AB}+5\,\overline{DC}}\,.$$

Da qui, dividendo numeratore e denominatore per $\overline{DC}$ e ricordando che: $\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}=\frac{3}{2}$, a conti fatti si trova:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{17}{13}.$$

Q7) Risolviamo il sistema delle due equazioni esprimendo y, z in funzione di x. Si trova:

$$y=6+5\,x\,,\quad z=-4-3\,x\,.$$

Ponendo $x=t$, otteniamo le equazioni parametriche della retta:

$$x=t\,,\ \ y=6+5\,t\,,\ \ z=-4-3\,t$$

e, immediatamente, i suoi parametri direttori: $(1,5,-3)$. Queste sono anche le componenti di un vettore avente la stessa direzione della retta, denominato anche *vettore direttore* della retta.

Ovviamente questo non è l'unico vettore avente la direzione della retta. In effetti, hanno la stessa direzione della retta tutti i vettori di componenti $(k, 5k, -3k)$, essendo k è un parametro reale non nullo.

Q8) Integrando per variabili separate l'equazione differenziale che definisce la variazione dell'intensità della corrente rispetto al tempo a partire dall'istante dell'apertura del circuito, si trova il suo integrale generale:

$$i=A\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

dove A è una costante arbitraria positiva.

Siccome nell'istante $t=0$, nel quale viene aperto il circuito, $i(0)=\frac{V}{R}$ e siccome $i(0)=A$, allora $A=\frac{V}{R}$.

In definitiva, nell'istante in cui il commutatore viene trasferito da A a B (vedere figura 1), il circuito (che comprende ancora R ed L ma dal quale è stato escluso il generatore) è attraversato da una corrente, detta <u>extracorrente di apertura</u>, data dalla seguente funzione:

$$i=\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

La sua durata è di qualche piccola frazione di secondo. (Per questo, per poterla osservare, il commutatore deve essere trasferito molto rapidamente da A a B.)

Per esempio, con riferimento alla situazione proposta, dopo $t=0{,}4$ s il valore di i, calcolato mediante uno strumento di calcolo automatico, è: $i\approx 0{,}00008$ ampère; praticamente $i=0$.