PROBLEMA 1.

Un corpo, avente la temperatura T_0, una volta che sia stato immerso in un ambiente mantenuto a temperatura costante T_1, con $T_0>T_1$, riduce via via la sua temperatura. Il tasso di diminuzione della temperatura T del corpo rispetto al tempo t è regolato dalla seguente legge (*legge del raffreddamento di Newton*):

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_1)\,,$$

dove k è una costante dipendente dalle caratteristiche del sistema corpo-ambiente.

1) Si dimostri che la legge che esprime l'andamento di T in funzione di t è del tipo seguente:

$$T = a\,e^{-b\,t} + c\,, \quad (e\approx 2{,}71),$$

e si trovino i valori delle costanti a, b, c, espressi per mezzo di k, T_0, T_1.

2) Posto che t sia misurato in secondi e T in gradi centigradi, in quali unità sono misurate le costanti a, b, c e il tasso dT/dt ?

Ammesse tali unità di misura, determinare la legge $T=T(t)$ sapendo che $k=1/50$ e che nell'istante iniziale supposto uguale a 0, sia $T(0)=40$ e $T'(0)=-0{,}36$.

3) Si studi la funzione $T=T(t)$ così trovata e se ne disegni il grafico in un idoneo riferimento cartesiano, prescindendo dalla questione fisica; determinare in particolare gli intervalli in cui la funzione cresce o decresce.

4) Si calcoli quanto tempo impiega il corpo, dall'istante della sua immersione nell'ambiente:
   a) a ridurre la sua temperatura del 10%;
   b) a raggiungere la temperatura dell'ambiente medesimo.

PROBLEMA 2.

Si consideri il seguente polinomio nell'indeterminata t:

$$\frac{1}{4}t^3 + p\,t + q\,,$$

dove p, q sono parametri reali. Si sa che -2 è un suo zero.

1) Calcolare:
   a) la somma degli altri due zeri del polinomio (considerati nel campo complesso);
   b) i valori di q per i quali i tre zeri del polinomio sono reali.
2) Posto che la legge seguente:

$$v = \frac{1}{4}t^3 + p\,t + q \quad (\text{con } 0\le t\le 6)$$

   indichi la velocità v (espressa in metri al secondo) di un corpo che si muove su una retta r in funzione del tempo t (espresso in secondi):
   a) determinare tale legge nel caso in cui l'accelerazione cui è sottoposto il corpo è nulla nell'istante $t'=2$ s e disegnarne l'andamento in un conveniente sistema di riferimento cartesiano.
   b) determinare anche la legge del moto, supponendo che nell'istante $t=0$ il corpo si trovi nell'origine O sulla retta r, sulla quale si suppone fissato un riferimento cartesiano (OU), e descrivere per sommi capi come si svolge il moto del corpo.
   c) calcolare inoltre quanto cammino ha percorso il corpo dall'istante iniziale a quello in cui inverte il suo moto sulla retta r e il cammino percorso nell'intervallo [0,6].
3) Spiegare in modo esauriente perché esso ripassa per O una ed un'altra volta soltanto in un istante compreso fra il 5° e il 6° secondo dopo la partenza da O.

QUESITI.

1) I signori Rossi hanno tre figli, due dei quali sono maschi. Calcolare la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio.

2) Calcolare la derivata della funzione $f(x)=|x-1|+x$ e tracciare sullo stesso piano il grafico della funzione e quello della sua derivata. Fornire ampia giustificazione delle operazioni eseguite.

3) Sono dati due numeri reali positivi a, b. Dimostrare che la loro media armonica non supera la loro media geometria che, a sua volta, non supera la loro media aritmetica.

4) È data la seguente successione di termine generale a_n, definita per ricorsione:

$$a_n = \begin{cases} 2 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + 2n \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

a) Trovare l'espressione analitica di a_n.

b) Calcolare il limite della successione a_n/n^2.

5) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la parabola avente il fuoco nel punto F ed equazione $y^2=4x$. Indicato con P il suo punto di ordinata 2, si trovi la pendenza della retta n perpendicolare alla tangente alla parabola in P (questa retta n è denominata *normale* alla parabola in P). Indicato con Q un punto situato sulla parallela all'asse della parabola condotta per P ($x_Q > x_P$), si verifichi che la retta n è bisettrice dell'angolo $F\widehat{P}Q$.

In realtà, questo fatto – ossia che la normale alla parabola in un suo punto P è bisettrice dell'angolo $F\widehat{P}Q$ – vale per ogni punto P della parabola ed ha un importante significato fisico, collegato al fenomeno della propagazione delle onde alla superficie di un liquido. Si dica qual è questo significato fisico.

6) La base maggiore di un trapezio è uguale ai $3/2$ della minore. La retta r che congiunge i punti medi dei lati obliqui divide il trapezio in due poligoni. Si considerino i solidi generati da tali poligoni in una rotazione completa intorno alla retta r e si calcoli il rapporto tra il volume del solido maggiore e quello del minore.

7) Nello spazio, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), è assegnata la retta di equazioni:

$$x - 2y - 3z = 0, \quad 2x - y - z + 2 = 0 .$$

Trovare le componenti (a,b,c) di un vettore avente la stessa direzione della retta.

8) Come si sa dallo studio della Fisica, un circuito elettrico (figura 1) con una resistenza R ed un'induttanza L, soggetto ad una forza elettromotrice costante V, è attraversato da una corrente costante $i=V/R$. Tuttavia, se si interrompe bruscamente il circuito (il commutatore viene trasferito molto rapidamente da A a B), la corrente i non sparisce istantaneamente ma dura ancora qualche tempo, ancorché brevissimo, variando rispetto al tempo t secondo la legge seguente:

$$-L\frac{di}{dt} = Ri .$$

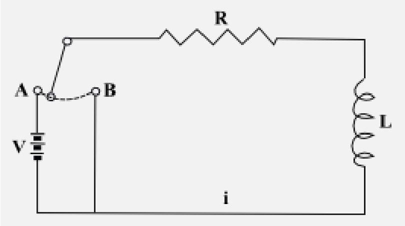

figura 1

Posto che sia:

$$R=50 \text{ ohm}, \; L=2{,}5 \text{ henry}, \; V=12 \text{ volt},$$

verificare che è $i=0$ praticamente dopo 0,4 secondi dall'apertura del circuito.