Emilio Ambrisi

Triangoli isosceli aventi perimetro ed area uguali

« Lo studio della geometria trarrà vantaggio da una presentazione non statica delle figure, che ne renda evidenti le proprietà nell'atto del loro modificarsi».

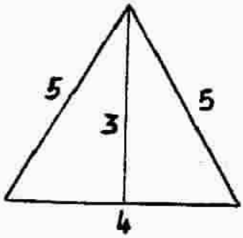
E' questa una delle osservazioni contenute nei programmi di matematica del 9.2.1979 per la scuola media, ed è nell'ottica di questa raccomandazione che va visto anche l'argomento: «semplici problemi di isoperimetria ed equiestensione», sulla cui rilevanza didattica, molti hanno scritto, In particolare, si è rilevato che i ragazzi giungono ad una migliore acquisizione dei concetti di area e perimetro mettendoli a confronto, cioè facendo loro vedere che figure di perimetro uguale (isoperimetriche) hanno in genere aree diverse, e viceversa, figure di area uguale, hanno in genere perimetri diversi. Ciò è stato ben evidenziato in tante esperienze e in primo luogo da quelle eseguite e descritte, nei suoi libri, da Emma Castelnuovo.

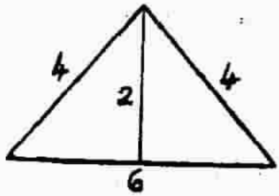
L'argomento presenta un indubbio interesse didattico e può essere affrontato a vari livelli, con gli strumenti matematici di cui via via ci si dota.

In una prima classe di Liceo Scientifico, ad esempio, l'insegnante aveva posto la seguente questione:

«Se due triangoli isosceli hanno lo stesso perimetro e la stessa area, sono congruenti?

La risposta degli allievi, non immediata naturalmente, fu che i due triangoli potevano non essere congruenti e quale prova molti di essi esibivano i triangoli isosceli:





entrambi di perimetro 14 ed area 6.

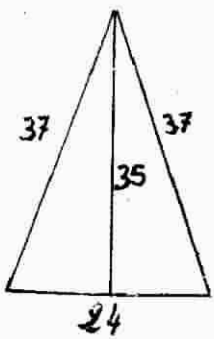
La delusione fu che quei triangoli non esistevano: ciò lo si poteva verificare rapidamente applicando le proprietà triangolari o anche il teorema di Pitagora [1].

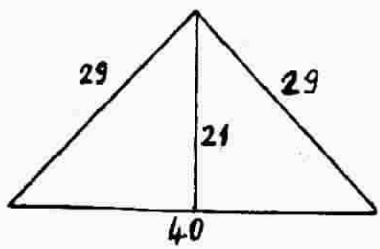
Mantenendo le misure dei lati, ad esempio, occorreva modificare quelle delle altezze: per il primo invece di 3, $\sqrt{21}$, e per il secondo invece di 2, $\sqrt{7}$.

I perimetri continuavano ad essere uguali, ma le aree no (avendo variato le altezze).

La calcolatrice tascabile costituiva dunque lo strumento più idoneo per fornire la prova, la cui ricerca non doveva essere limitata esclusivamente a misure intere.

Così veniva fuori la coppia di triangoli isosceli non congruenti a misure intere con l'applicazione ripetuta del 2 teorema di Pitagora.

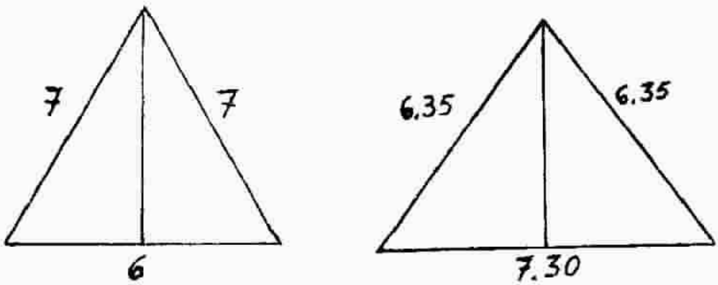




---

[1] Il triangolo *ACD* non è costruibile poiché *AC* non è minore della somma degli altri due. Il triangolo *EFL* non è rettangolo.

ma anche coppie non congruenti del tipo:



dove l'eventuale scarto nel risultato dell'area era dovuto, alla aprossimazione considerata. La scoperta della «prova», non casuale, ma ottenuta operativamente — come si dice — lavorando cioè con i numeri, conduceva a formulare la domanda:

«di assegnati perimetro ed area esiste solo una coppia di triangoli isosceli o ne esistono di più, eventualmente infiniti?»

La considerazione di numeri a più cifre decimali e soprattutto l'approssimazione conduceva gli alunni a propendere più per la seconda ipotesi.

In effetti, sussistono i seguenti teoremi:

I) Assegnato $p>0$, un triangolo isoscele di perimetro p può avere al più area $\frac{\sqrt{3}}{36}p^2$ (²)

II) Assegnato $p>0$, per ogni k, $0<k<\frac{\sqrt{3}}{36}p^2$ esistono esattamente due triangoli isosceli, non conguenti, di perimetro p e area k.

(²) Cfr. Bruno Rizzi, *Problemi di gare matematiche*. Quaderni del Periodico di Matematiche n. 1, Roma 1974.

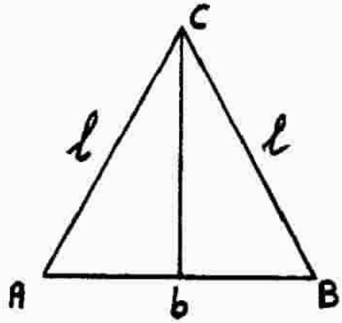
Se una prova del primo può essere data, in modo intuitivo, già nelle prime classi, una dimostrazione del secondo richiede che gli allievi abbiano una certa familiarità con lo studio delle funzioni e con i primi concetti dell'Analisi.

Una dimostrazione di entrambi i risultati può essere la seguente. Se ABC è un triangolo isoscele di perimetro p, lato l e base b, allora

$$2l + b = p$$

cioè

$$l = \frac{p-b}{2}$$



b può variare tra 0 a $\frac{p}{2}$ ed esistono quindi infiniti triangoli isosceli di perimetro p.

Se poniamo $b = x$, l'altezza h del triangolo è

$$h = \sqrt{\left(\frac{p-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{p\ (p-2x)}$$

L'area del triangolo in funzione di x è

$$K\ (x) = \frac{x}{4}\sqrt{p\ (p-2x)}$$

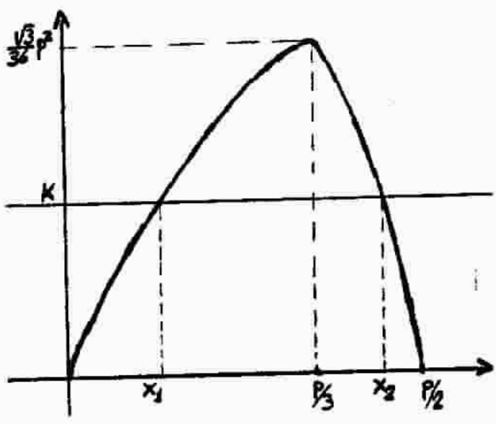
Proponiamoci di studiare la funzione

$$x \longmapsto K(x) \qquad \text{con } 0 < x < \frac{p}{2}$$

Sia $K'(x)$ la funzione derivata

$$K'(x) = \frac{1}{4}\sqrt{p(p-2x)} - \frac{px}{4\sqrt{p(p-2x)}} = \frac{p^2-3px}{4\sqrt{p(p-2x)}}$$

$K'(x)$ è maggiore di zero quando p^2-3px è maggiore di zero, cioè quando $x < \frac{p}{3}$ ed è $K'(x) = 0$ quando $x = \frac{p}{3}$. In $x = \frac{p}{3}$ la funzione $x \longmapsto K'(x)$ presenta un massimo. Poiché per $x = \frac{p}{3}$ il triangolo è equilatero, ne discende che l'area è massima quando il triangolo è equilatero. In questo caso l'area è $\frac{\sqrt{3}}{36}p^2$.



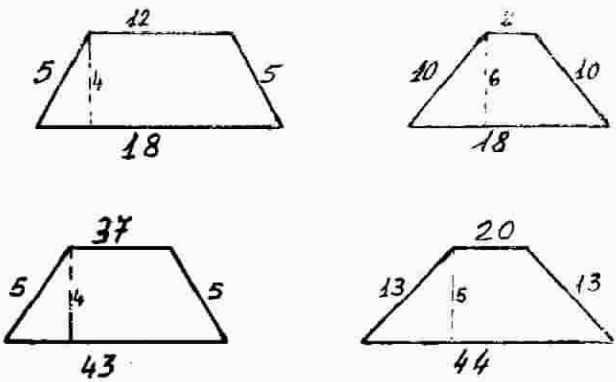
L'andamento globale della funzione $x \longmapsto K(x)$ può essere rappresentato dal grafico in figura

Il grafico è molto espressivo perché fa risaltare subito che ogni retta $y = k$, parallela cioè all'asse x, interseca la curva in due punti distinti di ascisse x_1, x_2 se k è compreso tra 0 e $\frac{\sqrt{3}}{36}p^2$.

Ciò prova dunque che esistono esattamente due triangoli isosceli non congruenti di perimetro p ed area k, uno di base x_1, l'altro di base x_2.

Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto operando una diversa scelta della variabile: ad esempio, invece di $b = x$, ponendo $l = x$ o anche considerando come variabile del problema l'angolo alla base.

In conclusione figure che hanno lo stesso perimetro e la stessa area non sono in genere congruenti, lo sono se si tratta, ovviamente, di triangoli equilateri, quadrati e, più in generale, poligoni regolari con uno stesso numero di lati. Lo sono ancora se si tratta di rettangoli o anche di triangoli rettangoli. Lo stesso problema, poi, affrontato nel caso dei trapezi isosceli porta un alunno del biennio alla scoperta di coppie del tipo



aventi perimetro ed area uguali. ma non congruenti.