Dalla Crostata Camilla a Fibonacci e Mandelbrot

Autore: Corrado Simone Binetti

"Le cose di questo mondo non possono diventare note senza la conoscenza della matematica." Roger Bacon

La Natura è intrisa di forme geometriche. Le possiamo trovare dappertutto: nei cristalli, nelle rocce, nei palazzi; nel mondo vegetale come in quello animale: basti pensare alle molteplici simmetrie dei fiori, ad una stella marina, al guscio di una chiocciola o alla complessa forma di una fronda di felce. La matematica è sempre stata utilizzata per interpretare e spiegare la Natura: osservare un fiore, una foglia o un frutto per scoprire quale e quanta matematica possa essere nascosta in essi è un'attività stimolante e, anche se non è certamente nuova, può riservare ancora grandi sorprese.

Prendendo spunto dalla ricetta della torta Camilla, a base di mandorle e carote (realizzata dagli allievi Ferrara Vittoria, Bonasia Cosimo, Racanati Nicola Sergio e Lamparelli Michele della IV A Pasticceria dell'Istituto Alberghiero di Molfetta) ho voluto analizzare lo stretto legame fra il fiore e le foglie della carota e la successione di Fibonacci e …. non solo!

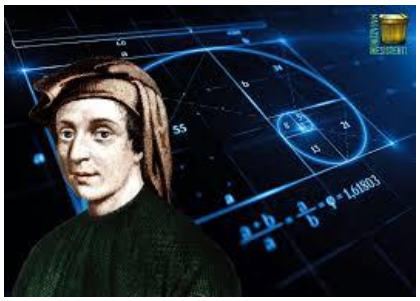
Vediamo, allora, di guardare "con occhi diversi", più nei dettagli la pianta dell'ingrediente principale della ricetta: **la carota**, offrendo brevi notizie botaniche su questo ortaggio.

La **carota** (***Daucus carota***) è una pianta erbacea dal fusto di colore verde appartenente alla famiglia delle **Apiaceae.**
I fiori, piccoli**, pentameri**, a simmetria raggiata, sono spesso bianchi o giallastri, talvolta rossastri come il fiore centrale dell'ombrella di carota. Sono costituiti quindi da **5 petali** e **5 sepali** ridotti, l'androceo è formato da **5 stami**, l'ovario è infero formato da **2 carpelli**. L'ovario porta **2 stili** che si allargano alla base in un disco nettarifero.

"Ma questi numeri sorgono a caso, come nell'estrazione di una lotteria? Oppure dietro ad essi c'è una regola, un qualche ordine nascosto, che permette di trovarne nella sequenza anche altri, più piccoli o più grandi?". Tutti i numeri su citati fanno parte di una famosa ***successione*** numerica ed hanno una lunga storia che si deve al famoso matematico del XIII secolo Leonardo da Pisa, detto ***Fibonacci*** (Pisa, 1170 ca – Pisa, 1250 ca) che guarda caso ha avuto legami con l'imperatore del Castel del Monte, Federico II di Svevia.
Ma il legame tra i fiori e la sua successione non l'ha scoperto Fibonacci! J. Keplero (1571–1630) è stato probabilmente il primo a collegare la successione di Fibonacci con gli aspetti botanici, in particolare nelle sue ricerche sulla fillotassi (dal greco *phyllon*, foglia + *taxis*, ordine), la quale studia la disposizione delle foglie sui rami. Successivamente, A. Schimper (1803–67), A. Braun (1805–77) e A. Bravais (1811–63) riconobbero la corrispondenza tra gli elementi fiorali e la successione. Grazie

a questi illustri esponenti, possiamo osservare come la crescita dei fiori, delle foglie e dei rami di una pianta segua specifici schemi.
Un semplice esempio è dato dal numero di petali dei fiori; la maggior parte ne ha 3 (come gigli e iris), 5 (ranuncoli, rose canine, plumeria, apiaceae), oppure 8, 13 (alcune margherite), 21 (cicoria), 34, 55 o 89 (asteracee). Questi numeri fanno parte della celebre successione di Fibonacci in cui ciascun numero equivale alla somma dei due precedenti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233…. Un'importante caratteristica della successione è il fatto che il rapporto tra qualunque numero e quello precedente nella serie tenda verso un valore ben definito: 1,618…. Infatti, analizzando attentamente la mastodontica opera matematica di Fibonacci, Liber Abaci, è possibile scoprire diversi modi per poter calcolare il Numero Aureo, in particolare analizziamo quello con la Successione di Fibonacci. Consideriamo infatti i primi due numeri naturali a noi ben noti: 0 e 1 e li sommiamo, ottenendo: 0+1=1, di conseguenza i primi tre numeri della successione sono: 0,1,1,...; continuando all'infinito, sommando come regola generale l'ultimo termine con il penultimo, otteniamo la famosa successione di Fibonacci: 0,1,1,2,5,8,13,21,34,55,89,144,233,... . Per chi avesse qualche dubbio si può dimostrare la validità generale della 1°, della 2° e della 3° conclusione:

1) Considero gli ultimi due elementi, li divido ed ottengo sempre le prime due cifre del Numero Aureo, cioè 1,6;



2) Dividendo per l'ultimo elemento i due precedenti, otteniamo le due Percentuali Auree, cioè rispettivamente 62% e 38%;

3) Dividendo infine le due percentuali ottenute otteniamo le due cifre del Rapporto Aureo.

In simboli matematici, se chiamiamo l'ultimo elemento con U_n, quello precedente con U_{n-1} e quello ancora precedente con U_{n-2}, otteniamo infatti:

1) $\frac{U_n}{U_{n-1}} \cong 1{,}6$

2) $\frac{U_{n-1}}{U_n} \cong 62\%$ $\quad$ $\frac{U_{n-2}}{U_n} \cong 38\%$

3) $R\% \cong 1{,}6$

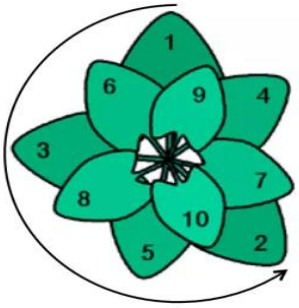
Se infatti consideriamo la seguente terna: U_n=233, U_{n-1}=144, ed infine U_{n-2}=89, otteniamo:

1) $\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{233}{144} \cong 1{,}618 \cong 1{,}6$

2) $\frac{U_{n-1}}{U_n} = \frac{144}{233} \cong 0{,}616 \cong 0{,}62 \cdot 100\% \cong 62\%$

$\frac{U_{n-2}}{U_n} = \frac{89}{233} \cong 0{,}381 \cong 0{,}38 \cdot 100\% \cong 38\%$

3) Quindi il rapporto percentuale, ottenuto è: $R\% = \frac{62\%}{38\%} \cong 1{,}6$, che rappresentano le prime due cifre del Numero Aureo.

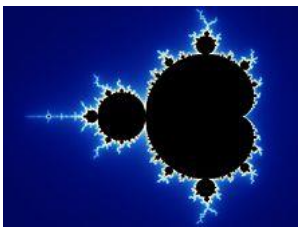


E' infine importante sottolineare che Il ragionamento è valido escludendo le prime tre cifre da cui nasce la costruzione della successione di Fibonacci. Questo è il numero aureo o sezione aurea, φ (Phi), che ricorre spesso sia in natura che in opere architettoniche costruite dall'uomo, come le piramidi. Nelle piante con foglie disposte a spirale, per ogni giro attorno al fusto ci sono in media Phi foglie, fiori o petali. Ciò significa che, girando attorno ad uno stelo e muovendosi dal basso verso l'alto, incontreremo una foglia o un fiore ogni 222,5°, valore che si ottiene dividendo l'angolo giro di 360° per Phi.

Ma andando più a fondo nell'analisi delle **infiorescenze della carota** selvatica si nota che la struttura di base viene ripetuta un numero finito di volte. Si tratta di organismi la cui forma è assimilabile a quella di un ***frattale***, concetto matematico sorto in anni relativamente recenti, appena nella metà del secolo scorso, per opera di **Mandelbrot** (Varsavia, 20 novembre 1924 –Cambridge, 14 ottobre 2010).

La definizione di frattale non è facile per cui, senza entrare in una trattazione più approfondita, non è questa la sede, mi preme evidenziare una caratteristica però peculiare della maggior parte delle figure geometriche che si vogliono includere nella categoria dei frattali, che è l'**autosimilarità**, la proprietà per cui una parte della figura è geometricamente simile all'intera figura, anche se in scala ridotta.

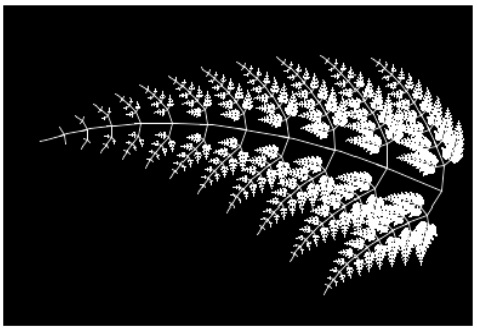
Ossia l'oggetto si ripete nella sua forma allo stesso modo su scale diverse, e dunque ingrandendo una qualunque sua parte si ottiene una figura simile all'originale.



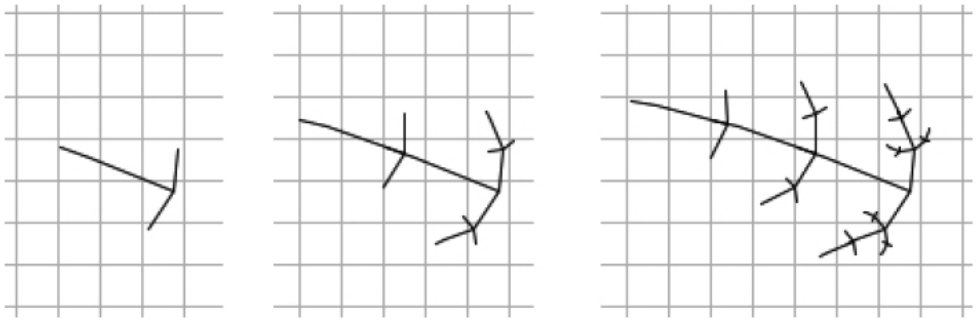
Poiché il modo migliore per comprendere è quello di sperimentare, ho pensato di seguire in questo lavoro un approccio il più possibile costruttivo, predisponendo quindi del software di geometria dinamica Geogebra, che ci permetterà di costruire la successione di Fibonacci utilizzando il Triangolo di Tartaglia e di un'applet reperibile in rete, per simulare alcuni aspetti del vegetale esaminato (foglia e fiore) per evidenziare la frattalità insita in esse.

Foglie di ombrellifera: Il nome di questa famiglia deriva dal particolare tipo di infiorescenza, costituita da una ombrella semplice o composta, che può simulare un grande fiore. In molti casi il lembo fogliare delle foglie basali è profondamente suddiviso, fino a 2–3 livelli diversi. Piante erbacee, frequenti nelle zone temperate, contano in Italia oltre 200 specie, utilizzate anche come

piante aromatiche (anice, cumino), alimentari (**carota**, finocchio, prezzemolo, sedano). Qualche specie risulta tossica (cicuta).



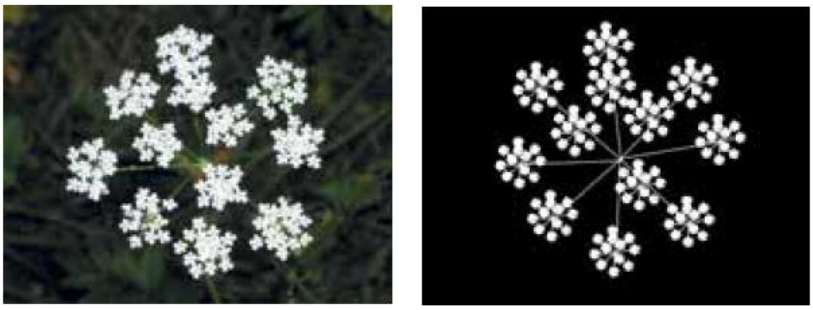
Foglia di ombrellifera e sua simulazione



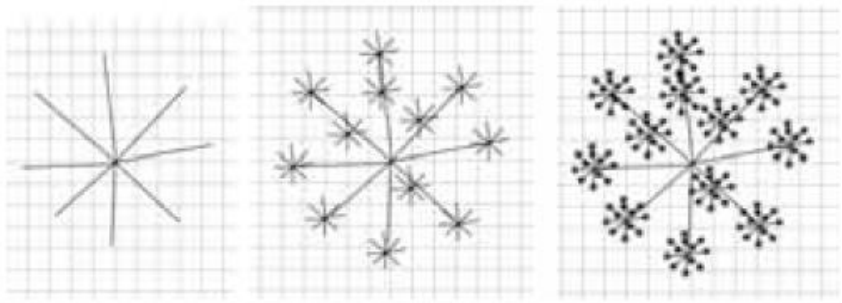
Costruzione della simulazione utilizzando un software appositamente costruito presente al seguente indirizzo: http://www.dmi.units.it/~logar/mescef (alla voce: applet frattali)

Il **frattale** è costruito partendo da una figura di base costituita da tre segmenti.
In questo caso le tre copie della figura di base vengono inserite esattamente nei tre estremi dei segmenti che costituiscono la figura iniziale. Il frattale viene infine riscalato lungo l'asse orizzontale del rapporto di 4/5.

Infiorescenza di una Ombrellifera Nella famiglia delle Ombrellifere i fiori si distribuiscono in caratteristici raggruppamenti (infiorescenze) denominate ombrelle . Nell'immagine sono rappresentate ombrelle composte, costituite da piccoli fiori bianchi. Le ombrellifere sono abbondanti nelle zone temperate. Molte vengono utilizzate come pian te aromatiche (anice, cumino), o commestibili (**carota**, finocchio, prezzemolo, sedano); alcune, come la cicuta, sono velenose.

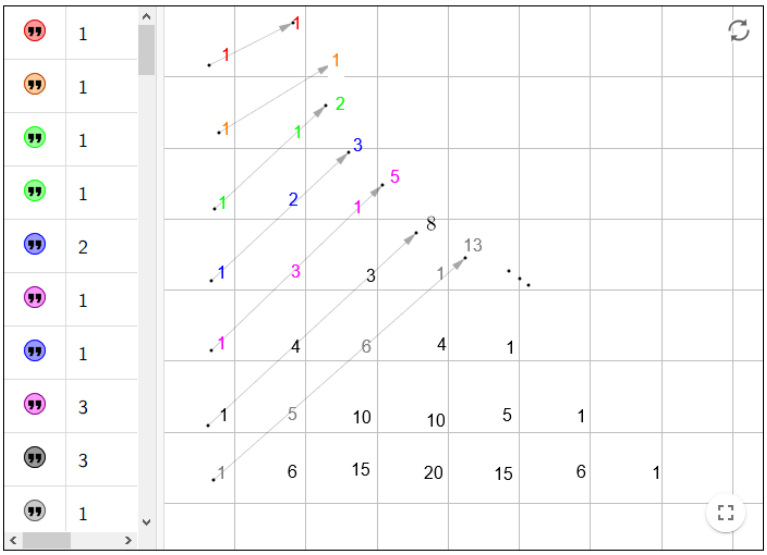


Infiorescenza di un’ombrellifera e sua simulazione



Costruzione della simulazione, utilizzando lo stesso software sopra citato

La figura di base per costruire la simulazione è costituita da 8 segmenti passanti tutti per uno stesso punto. Gli otto segmenti vengono poi riscalati e inseriti in 12 punti del piano. Iterando il procedimento, si ottiene una simulazione molto soddisfacente dell’infiorescenza dell’ombrellifera.
Un’ altra interessante attività consiste nella realizzazione della successione di Fibonacci, tramite il software di Geometria dinamica, Geogebra, utilizzando il triangolo di Tartaglia:



Abbiamo ottenuto il Triangolo di Tartaglia, utilizzando la griglia in dotazione nella interfaccia grafica. Utilizzando lo strumento "Testo", abbiamo trascritto le cifre del triangolo di Tartaglia dandogli una forma simile ad un triangolo rettangolo, per renderle più accattivanti alla vista. Poi con lo strumento "Vettore", abbiamo costruito delle frecce, che in punta hanno i numeri della successione di Fibonacci, ottenuti sommando le cifre presenti sul vettore, quando esse erano più di una. Abbiamo utilizzato, infine, gli strumenti "Mostra e nascondi oggetto" e "Mostra e nascondi etichetta" per occultare tutti gli elementi non necessari alla nostra costruzione.

Questo itinerario didattico vuol essere un esempio di rinnovamento della didattica basato sulla educazione alla modellizzazione con strumenti elementari e facilmente reperibili in rete. Educare alla modellizzazione comporta un modo diverso di proporre lo studio della matematica, non consiste nell'arricchire il percorso didattico con un ventaglio di applicazioni tratte dalla vita quotidiana, ma è piuttosto un invito ad impostare il processo educativo ancorandolo alla modellizzazione della realtà. Punto centrale è una interazione tra mondo reale e mondo matematico, in un ping-pong dinamico, che procede per gradi durante tutto il corso di studi. Gli studenti in questo modo non hanno solo il ruolo "passivo" dei fruitori, ma si trovano ad essere protagonisti della gestione stessa del progetto, senza rinunciare alla forma laboratoriale e all'apprendimento di gruppo.

La successione di Fibonacci, quindi non appare solamente un modello matematico per risolvere "teorici" problemi di evoluzione ma è ravvisabile in tutto ciò che ci circonda. Lo stretto collegamento con la proporzione aurea ha impressionato nei secoli la mente dell'uomo, che è arrivato a cogliervi col tempo un ideale estetico di armonia delle forme, spingendosi a ricrearla quale canone di bellezza. Ogni volta che i ragazzi si soffermeranno ad ammirare un campo di girasoli o a mondare un cavolfiore, dovranno ricordarsi che dietro l'armonia e il piacere che ne ricaveranno, si celano le misteriose proprietà numeriche di φ (Phi).

Ma non solo … come sostiene Mandelbrot, le relazioni fra frattali e natura sono più profonde di quanto si creda: «Si ritiene che in qualche modo i frattali abbiano delle corrispondenze con la struttura della mente umana, è per questo che la gente li trova così familiari. Questa familiarità è ancora un mistero e più si approfondisce l'argomento più il mistero aumenta».

Al mio professore di Analisi Superiore E. Janelli, già professore ordinario dell' Università degli Studi di Bari Aldo Moro.

Bibliografia e Sitografia:

- https://www.festascienzafilosofia.it/2014/03/la-matematica-nella-realta/;
- https://www.scientificast.it/geometrie-piante-fibonacci/;
- Appunti tratti dal ricettario del Prof. R. Pagano, docente tecnico-pratico di Cucina e Pasticceria dell'Istituto Alberghiero di Molfetta;
- Matematica e Bellezza: Fibonacci ed il nemero aureo a cura di Antonino Zichichi, C.E. Il Cigno G.G. Edizioni-Roma;
- https://ortobotanicotrieste.it/bookshop/quaderno-13-margherite-e-spirali-cavolfiori-e-frattali-una-passeggiata-matematica-ii/ .