Tema: Altri procedimenti risolutivi non standard.
di Antonino Giambò

1. In un precedente contributo pubblicato su questa medesima rubrica (cfr.: *Procedimenti risolutivi non standard*) mi sono occupato di alcuni problemi che possono essere risolti seguendo metodi che escono dai canoni consueti.

Qui ne propongo di nuovi mostrando, per ciascuno di essi, due procedimenti: uno che potrei definire tradizionale e uno per l'appunto non standard.

2. Questo è il testo del primo problema:

PROBLEMA 1. Due traghetti fanno la spola tra i porti di Messina e Villa San Giovanni. Viaggiano a velocità costanti, ma diverse fra loro, su rotte parallele alla congiungente i due porti. Il traghetto più veloce parte da Messina nello stesso istante in cui l'altro parte da Villa San Giovanni. I due traghetti s'incrociano a 3,4 km dal porto più vicino. Una volta raggiunte le rispettive mete si fermano entrambi per lo stesso tempo e ripartono, incrociandosi di nuovo a 2 km dal porto più vicino. Qual è la distanza fra i due porti?

Mi corre l'obbligo, prima di passare alla risoluzione, di precisare che il problema è un adattamento di un problema analogo che compare a pag. 80 del libro *Cyclopedia of Puzzles* by Sam Loyd (1), New York, The Lamb Publishing Company, 1914. Questo il testo originale:

Two boats start from opposite sides of a river at the same instant, and meet 720 yards from the shore. They remain in the slip sten minutes, and on the return trip meet 400 yards from the other shore. How wide is the river?

Un adattamento dello stesso problema è stato proposto poi da Martin Gardner (2) nell'opera *Mathematical Puzzles and Diversions*, University of Chicago Press, 1961. Quest'opera, nella traduzione italiana di Mario Carlà, è pubblicata da Rizzoli, nella collana Supersaggi BUR col titolo *Enigmi e giochi matematici*, 1987.

RISOLUZIONE.

- Descrivo dapprima il procedimento "tradizionale".

Indichiamo con x (km) la distanza tra i due porti, con u la velocità del traghetto più veloce e con v la velocità dell'altro traghetto. Nell'istante t' in cui i traghetti s'incrociano la prima volta (contato dall'istante in cui i due traghetti partono dai rispettivi porti), il traghetto meno veloce ha percorso evidentemente 3,4 km, mentre l'altro traghetto ha percorso $(x-3{,}4)$ km. Risulta perciò:

$$x-3{,}4=u\,t',\quad 3{,}4=v\,t'\quad \text{e da qui, dividendo membro a membro:}\quad \frac{x-3{,}4}{3{,}4}=\frac{u}{v}.$$

Il traghetto più lento giunge nel porto di Messina con un ritardo t rispetto al momento in cui l'altro traghetto giunge nel porto di Villa S. Giovanni, e questo medesimo ritardo conserva alla ripartenza, dopo la sosta che ha la stessa durata per entrambi i traghetti. Cosicché, indicato con t" l'istante in cui essi s'incrociano la seconda volta (t" è contato dal momento in cui riparte da Villa S. Giovanni il traghetto più veloce), risulta:

[1] $$x-2=u\,t'',\quad 2=v\,(t''-t)\,.$$

Occupiamoci adesso di t. Se indichiamo con t_1 il tempo che impiega il traghetto più veloce a compiere l'intera traversata e con t_2 il tempo che impiega l'altro traghetto, risulta chiaramente:

$$t_1=\frac{x}{u}\quad\text{e}\quad t_2=\frac{x}{v}\quad\text{e pertanto:}\quad t=t_2-t_1=\frac{x}{v}-\frac{x}{u}=\frac{x}{uv}(u-v)\,.$$

In questo modo la seconda delle relazioni [1] diventa:

---

[1] Samuel (o Sam) Loyd, scacchista statunitense, creatore di giochi ed enigmi matematici, 1841-1911. A lui si deve, tra le altre cose, l'invenzione del celebre gioco del 15.

[2] Martin Gardner, matematico e divulgatore scientifico statunitense, 1914-2010.

$$2 = v\left(t'' - \frac{x}{uv}(u - v)\right).$$

Dall'eliminazione di t" fra questa relazione e la prima delle [1], dopo alcune semplici elaborazioni, si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{2(x-1)}{x+2} = \frac{u}{v}.$$

Confrontando questo valore di u/v con quello trovato in precedenza, si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{x-3{,}4}{3{,}4} = \frac{2(x-1)}{x+2}.$$

Risolta la quale ed escludendo la radice nulla, si trova $x = 8{,}2$.

È pertanto di 8,2 km la distanza fra i due porti.

- Mostro adesso un procedimento non standard.

La figura sottostante (figura 1) non è indispensabile, ma è decorativa. È invece fondamentale l'altra figura (figura 2), che schematizza la situazione. In essa il tratto rosso rappresenta il percorso del traghetto più veloce, quello che parte da Messina e che indichiamo con A; il tratto blu rappresenta il traghetto più lento, quello che parte da Villa S. Giovanni e che indichiamo con B.

figura 1

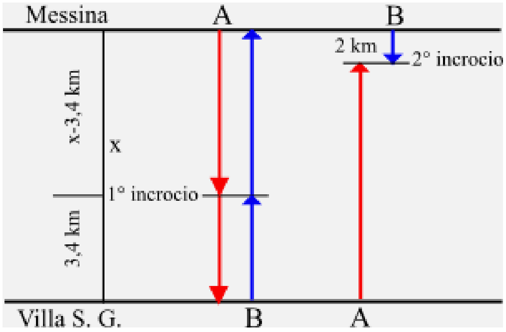

figura 2

Indichiamo ancora con x (km) la distanza dei due porti.

Osserviamo che il tragitto complessivo compiuto dai due traghetti, tra l'istante della loro partenza dai rispettivi porti e il 1° incrocio, è uguale proprio ad x, mentre il loro tragitto complessivo fra il 1° e il 2° incrocio è 2x. <u>Questo ha un significato fondamentale</u>: il tragitto di ciascun traghetto tra il 1° e il 2° incrocio è il doppio di quello che lo stesso traghetto ha compiuto fra la partenza e il 1° incrocio.

Ragioniamo sul traghetto A.

Tra la partenza e il 1° incrocio esso ha compiuto un numero di chilometri pari a $x-3{,}4$, mentre tra il 1° e il 2° incrocio ha compiuto un numero di chilometri pari a $3{,}4+(x-2)$. Deve essere pertanto:

$$3{,}4 + (x - 2) = 2 \cdot (x - 3{,}4) \quad \text{da cui segue:} \quad x = 8{,}2.$$

Ovviamente come con l'altro procedimento, ma forse in modo più semplice, certamente in modo più immediato.

OSSERVAZIONI.

- Si capisce che il percorso dei due traghetti non è esattamente rettilineo. L'abbiamo supposto tale solo per convenienza.
- Se avessimo ragionato sul traghetto B, considerato che esso ha compiuto 3,4 km fra la partenza e il 1° incrocio ed ha compiuto $(x-3{,}4)+2$ km fra il 1° e il 2° incrocio, ponendo questo secondo valore uguale al doppio del primo avremmo ottenuto ancora e ovviamente $x=8{,}2$.
- La distanza 8,2 km forse non è l'esatta distanza fra i due porti, ma questo è irrilevante ai fini del problema.
- I dati non sono sufficienti per determinare la durata della traversata né le velocità dei due traghetti. Ma lo diventerebbero se si conoscesse la velocità di uno dei due traghetti. Cosa che si può agevolmente controllare.

3. Questo è il testo del secondo problema:

PROBLEMA 2. Un libro è appoggiato su un tavolo come nella figura sottostante (figura 3). Le dimensioni di una pagina del libro sono 16 cm e 20 cm (vedere figura 3) e l'angolo diedro formato dalle pagine aperte misura 120°. I punti A e B dividono a metà i bordi che li contengono. Quanto misura il cammino più breve per andare da A a B, muovendosi lungo le pagine del libro?

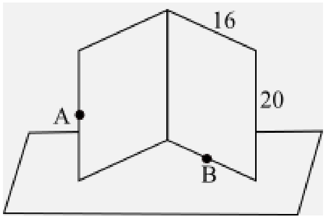

figura 3

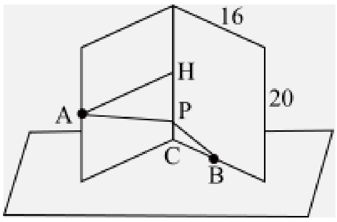

figura 4

RISOLUZIONE.

- Il primo procedimento forse non è un procedimento standard, ma sicuramente è un procedimento complicato se non altro perché richiede competenze nel campo dell'analisi infinitesimale e poi perché comporta calcoli noiosi. Vado comunque a descriverlo.

Si prende, sullo spigolo del diedro, un punto P compreso fra C ed H, essendo H la proiezione ortogonale di A sullo spigolo medesimo (figura 4) e si pone $\overline{CP}=x$, per cui $0\le x\le 10$. Un generico cammino che porti da A a B, muovendosi lungo le facce del diedro, dipende ovviamente dalla posizione di P, ossia dal valore di x, e per questo lo indichiamo con f(x). Si ha:

$$f(x)=\overline{AP}+\overline{PB}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{PH}^2}+\sqrt{\overline{CB}^2+\overline{CP}^2}=\sqrt{16^2+(10-x)^2}+\sqrt{8^2+x^2}\,.$$

Vale a dire:

$$f(x)=\sqrt{x^2-20x+356}+\sqrt{x^2+64}\,.$$

Facciamo ricorso all'analisi infinitesimale:

$$f\,'(x)=\frac{10-x}{\sqrt{x^2-20x+356}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+64}}\,.$$

Ponendo $f\,'(x)=0$, risolvendo l'equazione che ne scaturisce e prendendo la sola radice positiva, si trova $x=10/3$.

Si calcola la derivata seconda di f(x) e si trova che il suo valore, per $x=10/3$, è positivo. Si calcola $f(10/3)$ e si trova:

$$f\left(\frac{10}{3}\right)=\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2-20\cdot\frac{10}{3}+356}+\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2+64}=26.$$

Si calcola pure f(0) e f(16) e giacché questi due valori risultano maggiori di $f(10/3)$, si conclude che $f(10/3)=26$ è proprio il minimo cercato. Il cammino minimo è pertanto di 26 cm.

- C'è in realtà un procedimento alternativo molto semplice, che non richiede moltissime competenze, perlomeno non competenze di analisi infinitesimale. Lo vado a descrivere.

Bisogna immaginare di distendere le pagine aperte del libro su uno stesso piano come in figura (figura 5) e si capisce immediatamente che il cammino più breve è il segmento AB passante per P.

Ebbene, ricorrendo al teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ADB, si trova immediatamente che la misura di AB è 26 cm.

Se si vuole, si può pure calcolare la distanza CP e si trova che è $10/3$ cm. Ovviamente, tutto come con l'altro procedimento ma in modo più semplice e immediato.

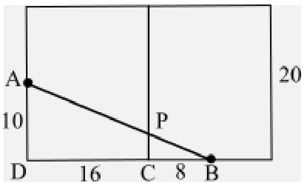

figura 5

OSSERVAZIONE. Il fatto che l'angolo diedro misuri 120° è un dato del tutto superfluo. Nulla cambia se quella misura fosse diversa, purché compresa fra 0° escluso e 180° incluso.

4. Ci occupiamo di un terzo problema.

PROBLEMA 3. In un tronco di piramide quadrangolare regolare gli spigoli delle basi misurano 12 cm e 6 cm, mentre l'altezza misura 8 cm. Il tronco è diviso in due tronchi dal piano parallelo alle basi ed equidistante da esse. Calcolare il rapporto fra il volume del tronco minore e quello del tronco maggiore, ottenuti con la divisione suddetta.

RISOLUZIONE.

- Descrivo dapprima il procedimento che seguirebbe la maggior parte degli studenti – lo dico per esperienza – senza riflettere minimamente sulla possibilità di procedimenti alternativi.

Si calcola la misura del lato del quadrato sezione (figura 6): $\overline{\mathrm{LM}}=9$ cm.

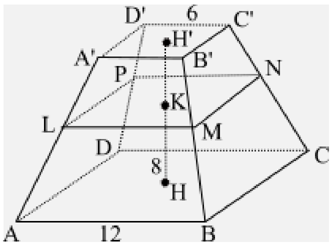

figura 6

Si calcola il volume V' del tronco minore:

$$\mathrm{V}' = \frac{1}{3}\,\overline{\mathrm{KH}'}\cdot\left(\overline{\mathrm{LM}}^2+\overline{\mathrm{A'B'}}^2+\overline{\mathrm{LM}}\cdot\overline{\mathrm{A'B'}}\right)=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot(9^2+6^2+9\cdot 6)=228.$$

Si calcola il volume V'' del tronco maggiore:

$$\mathrm{V}'' = \frac{1}{3}\,\overline{\mathrm{KH}}\cdot\left(\overline{\mathrm{LM}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{LM}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\right)=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot(9^2+12^2+9\cdot 12)=444.$$

Si trova il rapporto R cercato:

$$\mathrm{R}=\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}''}=\frac{228}{444}=\frac{19}{37}.$$

- In realtà, per risolvere questo problema basta sapere che lo spigolo della base maggiore del tronco di piramide è lungo il doppio dello spigolo della base minore e che il piano sezione è equidistante dalle basi. Non occorre sapere altro, per cui tutti gli altri dati forniti dalla traccia sono superflui.

Di fatto, se indichiamo con 2a la lunghezza dello spigolo della base maggiore, quella dello spigolo della base minore è a. Osserviamo poi che le altezze dei due tronchi, KH' e KH, in cui il tronco assegnato è diviso dal piano parallelo alle basi ed equidistante da esse sono evidentemente uguali. Si calcola, a questo punto, la lunghezza del quadrato sezione (figura 6) e si trova che è $3\mathrm{a}/2$. Indicati, infine, con V' e V'' i volumi delle due parti in cui il tronco è diviso dal piano sezione, il rapporto cercato R è tale che:

$$\mathrm{R}=\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}''}=\frac{\frac{1}{3}\,\overline{\mathrm{KH}'}\cdot\left(\overline{\mathrm{LM}}^2+\overline{\mathrm{A'B'}}^2+\overline{\mathrm{LM}}\cdot\overline{\mathrm{A'B'}}\right)}{\frac{1}{3}\,\overline{\mathrm{KH}}\cdot\left(\overline{\mathrm{LM}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{LM}}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\right)}=\frac{\left(\frac{3}{2}\mathrm{a}\right)^2+\mathrm{a}^2+\frac{3}{2}\mathrm{a}\cdot\mathrm{a}}{\left(\frac{3}{2}\mathrm{a}\right)^2+(2\mathrm{a})^2+\frac{3}{2}\mathrm{a}\cdot 2\mathrm{a}}=\frac{\frac{9}{4}+1+\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}+4+3}=\frac{19}{37}.$$

OSSERVAZIONE. Con entrambi i procedimenti è fondamentale il calcolo della lunghezza del lato LM del quadrato sezione. Anche per questo calcolo si possono seguire procedimenti diversi, ma quello che, a mio parere, è il più semplice e immediato fa ricorso al calcolo vettoriale. Lo vado perciò a descrivere.

Il vettore $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ può essere espresso in due modi:

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\overrightarrow{\mathrm{LA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}\ \text{ oppure }\ \overrightarrow{\mathrm{LM}}=\overrightarrow{\mathrm{LA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'M}}.$$

Da qui, sommando membro a membro le due uguaglianze – dopo aver costatato che i vettori $\overrightarrow{\mathrm{LA}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{LA'}}$ sono opposti, così come i vettori $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{B'M}}$, per cui la loro somma è il vettore nullo – segue:

$$2\,\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\ \text{ e perciò: }\ \overrightarrow{\mathrm{LM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}}{2}.$$

Si desume che il lato LM è uguale alla semisomma dei lati AB e A'B'.

5. Ancora un problema di geometria elementare.

PROBLEMA 4. Nel trapezio ABCD l'altezza misura 4 cm e le diagonali s'incontrano nel punto E. Si sa inoltre che i due triangoli EAB ed ECD hanno aree rispettivamente 75 cm^2 e 27 cm^2. Ai fini del calcolo dell'area del trapezio, i dati assegnati sono tutti necessari?

RISOLUZIONE.

- Descrivo un procedimento che rispetta gli schemi consueti, vale a dire che procedo al calcolo delle misure delle basi del trapezio, che sembrano essere necessarie per il calcolo della sua area.

Indichiamo allora con H e K i punti in cui l'altezza del trapezio, passante per E, interseca rispettivamente la base maggiore AB e la base minore CD (figura 7).

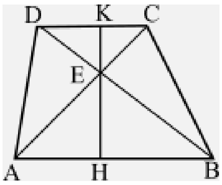

figura 7

In virtù dell'evidente similitudine dei triangoli EAB ed ECD, risulta:

$$\frac{\text{area (EAB)}}{\text{area (ECD}} = \frac{\overline{EH}^2}{\overline{EK}^2} \quad \text{da cui segue:} \quad \frac{\overline{EH}}{\overline{EK}} = \frac{5}{3}.$$

Di conseguenza, essendo $\overline{HK}$=4 cm, si ottiene agevolmente: $\overline{EH}$=2,5 cm, $\overline{EK}$=1,5 cm. Pertanto:

$$\overline{AB} = \frac{2 \times \text{area(EAB)}}{\overline{EH}} = \frac{2 \times 75}{2{,}5} = 60 \text{ (cm)},$$
$$\overline{CD} = \frac{2 \times \text{area(ECD)}}{\overline{EK}} = \frac{2 \times 27}{1{,}5} = 36 \text{ (cm)}.$$

In definitiva: $\text{area (ABCD)} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{HK} = \frac{60 + 36}{2} \cdot 4 = 192 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Da quanto esposto si evince che i dati assegnati sarebbero tutti necessari.

- In realtà, questo non è vero, ma per provarlo bisogna ragionare uscendo dagli schemi. Questi, come mostrato sopra, presuppongono la conoscenza delle misure di AB, CD, HK. Ma, a ben riflettere, quello che veramente occorre è la conoscenza del prodotto $\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\cdot\overline{HK}$ e questo, nel caso in esame, si può ottenere senza conoscere le misure di HK né di AB e CD. Andiamo a vedere in che modo.

Fermiamo l'attenzione sulle aree dei triangoli EAB ed ECD. Si ha:

$$\frac{1}{2}\,\overline{AB} \cdot \overline{EH} = 75, \quad \frac{1}{2}\,\overline{CD} \cdot \overline{EK} = 27.$$

Si ha inoltre, come già visto:

$$\frac{\overline{EH}}{\overline{EK}} = \frac{5}{3}, \text{da cui segue: } \overline{EH} = \frac{5}{8}\,\overline{HK}, \quad \overline{EK} = \frac{3}{8}\,\overline{HK}.$$

Pertanto risulta:

$$\frac{1}{2}\,\overline{AB} \cdot \frac{5}{8}\overline{HK} = 75, \quad \frac{1}{2}\,\overline{CD} \cdot \frac{3}{8}\overline{HK} = 27;$$

ossia:

$$\overline{AB} \cdot \overline{HK} = 240, \quad \overline{CD} \cdot \overline{HK} = 144.$$

Di conseguenza, sommando membro a membro, si ottiene:

$$\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right) \cdot \overline{HK} = 384.$$

Infine:

$$\text{area (ABCD)} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right) \cdot \overline{HK} = 192 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Come sopra, ovviamente, ma senza coinvolgere le misure di HK, AB, CD.

Insomma, fra i dati assegnati, è superflua la misura di HK.

OSSERVAZIONE. Naturalmente, se tra i dati del problema si cancella la misura di HK, non è più possibile calcolare le misure delle basi del trapezio. Questo implica che i dati che rimangono non determinano un trapezio ma si adattano ad un numero infinito di trapezi, tutti comunque aventi la stessa area di 192 cm^2.

Bisogna precisare, tuttavia, che anche quando siano assegnati tutti i dati elencati nella traccia, non è determinato un solo trapezio, giacché non ci sono elementi sufficienti per la definizione dei lati obliqui.

6. Concludo con una questione di aritmetica, della quale fornisco però un solo procedimento risolutivo, che tuttavia può essere annoverato tra i procedimenti non standard.

Premetto che si parla di numeri primi di Germain [3] e ricordo, al riguardo, che il numero primo p si denomina *numero primo di Germain* se è primo anche il numero $2p+1$.

PROBLEMA 5. Dimostrare che:

a) se p è un numero primo di Germain, con $p>3$, il numero $p+1$ è divisibile per 3;

b) esiste una ed una sola coppia di numeri primi gemelli che siano anche numeri primi di Germain.

RISOLUZIONE.

a) Si prendono in esame i numeri $2p, 2p+1, 2p+2$. Trattandosi di numeri naturali consecutivi, uno di essi (uno soltanto) è divisibile per 3. Evidentemente, $2p+1$ non lo è, essendo un numero primo. Non lo è neppure il numero $2p$, essendo p un numero primo maggiore di 3. Per esclusione, l'unico numero dei tre ad essere divisibile per 3 è il numero $2p+2$. Siccome $2p+2=2(p+1)$, si desume che $p+1$ deve essere divisibile per 3.

[c.v.d.]

Chi legge può verificare con esempi.

b) Scorrendo la successione dei numeri primi, la prima coppia di numeri primi gemelli è la coppia $(3,5)$. Ed è evidentemente anche una coppia di numeri primi di Germain. Infatti: $2\cdot3+1=7,\ 2\cdot5+1=11$. E sia 7 sia 11 sono numeri primi.

A questo punto si tratta di dimostrare che non esistono altre coppie di numeri primi gemelli che siano anche numeri primi di Germain. Lo facciamo ragionando per assurdo.

Consideriamo per questo una generica coppia di numeri primi gemelli $(p, p+2)$, con $p>3$. Ammettiamo che sia una coppia di numeri primi di Germain. Se così fosse dovrebbero essere primi entrambi i numeri $2p+1$ e $2(p+2)+1$. Accantoniamo il primo di questi due numeri e ragioniamo sul secondo.

Poniamo per questo l'attenzione sui seguenti numeri: $p, p+1, p+2$. Sono chiaramente numeri naturali consecutivi, per cui uno di essi (uno solamente) è divisibile per 3. Non possono esserlo né p né $p+2$ poiché sono entrambi numeri primi maggiori di 3. Deve esserlo, per esclusione, $p+1$. Questo implica che esiste un intero positivo k tale che $p+1=3k$. Pertanto risulta:

$$2(p+2)+1=2(p+1)+3=2\cdot3k+3=3(2k+1).$$

Vale a dire che il numero $2(p+2)+1$ non è un numero primo.

Si desume che è falsa l'ipotesi ammessa che il numero $p+2$ (con $p>3$) sia un numero primo di Germain.

In conclusione, non esiste altra coppia di numeri primi gemelli – oltre la coppia $(3,5)$ – che sia anche una coppia di numeri primi di Germain. La coppia $(3,5)$ è l'unica ad avere questa caratteristica.

[c.v.d.]

Anche adesso è possibile verificare con esempi.

Non hai veramente capito qualcosa fino a quando
non sei in grado di spiegarlo a tua nonna.

Albert Einstein, 1879-1955

[3] Marie-Sophie Germain, matematica francese, 1776-1831.