Tema: Espressioni numeriche … continue.

di Antonino Giambò

1. In questo articolo mi soffermo su un paio di espressioni numeriche che non rientrano nei canoni consueti, poiché sembrerebbero dominio più dell'Analisi Matematica (in particolare, studio delle serie) che della comunissima Algebra. E tuttavia proprio per mezzo dell'Algebra si risolvono le questioni che sottopongo all'attenzione di chi legge, come avrò modo di mostrare. Mi soffermo pure su alcune curiosità riguardanti la data di nascita di queste espressioni, la prima molto antica, la seconda molto meno.

2. La prima espressione è la seguente:

[1] $$x = n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cdots}}}$$

dove n è un numero naturale non nullo e dove i puntini di sospensione indicano una sequela di frazioni simili alle precedenti.

Si tratta di un caso particolare di espressioni conosciute come *frazioni continue*, di espressioni cioè aventi la forma seguente:

$$a = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

dove $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono numeri interi positivi, salvo a_0 che può essere anche nullo.

Se l'espressione si arresta ad uno di tali numeri, la frazione continua si dice *limitata*, se invece si estende all'infinito si dice *illimitata*. Se poi, da un certo punto in avanti, i numeri a_k sono uguali fra loro, la frazione si dice *periodica*. Se, inoltre, non tutti i numeratori delle varie frazioni sono uguali ad 1, la frazione si dice *generalizzata*, altrimenti si dice *semplice*.

In particolare, l'espressione [1] è un esempio di *frazione continua semplice illimitata periodica*.

In genere, il valore dell'espressione a è evidentemente un numero razionale positivo, facilmente calcolabile, se essa è limitata. Nel caso invece in cui si estenda all'infinito, tale valore è il limite della successione:

$$a_0\,,\;\; a_0 + \frac{1}{a_1}\,,\;\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}\,,\;\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}\,,\;\; \ldots\,,$$

vale a dire della successione i cui termini si ottengono arrestando l'espressione a al 1° addendo o al 2° o al 3° e così via. Termini che sono denominati di solito *ridotte di ordine* 1 o 2 o 3, eccetera.

Ora, non intendo soffermarmi su uno studio generale delle frazioni continue, ma occuparmi esclusivamente della frazione [1] ed è mio intendimento farlo senza scomodare i limiti.

Mi propongo precisamente di risolvere le seguenti questioni:

a) dimostrare che x è un numero irrazionale per ogni valore di n e trovare questo numero;

b) stabilire se esiste un valore di n per il quale x è il numero aureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

RISOLUZIONE. Costatiamo anzitutto che l'espressione assegnata x può essere scritta nel modo seguente:

$$x = n + \frac{1}{x}\,, \quad \text{da cui segue:} \quad x^2 - n\,x - 1 = 0\,.$$

Il valore di x è perciò la radice positiva di quest'equazione, che chiaramente ammette due radici reali, una positiva appunto e l'altra negativa.

a) Le radici dell'equazione sono razionali se e solo se il suo discriminante è un quadrato perfetto. Ora, questo discriminante è $\Delta=n^2+2^2$ e non può essere un quadrato perfetto per $n\neq 0$ giacché non esiste alcuna terna pitagorica in cui uno dei tre numeri che la compongono è il numero 2. Consegue da ciò che x è un numero irrazionale per ogni $n\neq 0$. Si ha precisamente:

$$x=\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}.$$

Per esempio, nel caso particolare in cui $n=2$ si trova facilmente: $x=1+\sqrt{2}$. Questo significa che si ha:

$$1+\sqrt{2}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}.$$

b) Tenendo presente la stessa equazione suddetta, sostituiamo φ al posto di x. Dopo alcune elaborazioni elementari otteniamo $n=1$. Cosa che, per la verità, si poteva intuire facilmente da un semplice esame dell'equazione medesima, a condizione che si ricordi che il numero aureo è la radice positiva dell'equazione $x^2-x-1=0$.

Questo significa comunque che il numero aureo si può mettere nella forma seguente, peraltro conosciuta:

$$\varphi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}.$$

BREVE NOTA STORICA.

L'idea di "frazione continua" – benché non esplicitamente – è presente nel celebre metodo euclideo delle divisioni successive, un'applicazione del quale si trova nella determinazione del massimo comune divisore di due numeri (Euclide, *Elementi*, VII, 2). Siamo all'incirca nel 300 a.C.

Ma la sistemazione dell'argomento avviene molto tempo dopo ed è opera di un gigante del pensiero matematico, lo svizzero Leonhard Euler (1707-1883), il quale dedicò alle frazioni continue un'opera specifica dal titolo *De fractionibus continuis dissertatio* (1747) e un capitolo della sua monumentale opera dal titolo *Introductio in analysin infinitorum* (1748). In quest'ultima compare una definizione di frazione continua:

Fractionem autem continuam voco eiusmodi fractionem, cuius denominator constat ex numero integro cum fractione, cuius denominator denuo est aggregatum ex integro et fractione, quae porro simili modo sit comparata, sive ista affectio in infinitum progrediatur sive alicubi sistatur.

Ossia, in una traduzione libera:

Chiamo pertanto continua una frazione il cui denominatore costa di un numero intero sommato ad una frazione; il cui denominatore è di nuovo costituito da un intero e da una frazione, e così via allo stesso modo sia che questo comportamento si estenda all'infinito sia che ad un certo punto si arresti.

Fra questi due poli, Euclide ed Eulero, distanti fra loro circa 2.000 anni, si registra il contributo di molti studiosi, uno dei quali, l'inglese John Wallis (1617-1703), ha coniato il temine *frazione continua* nella sua opera più importante dal titolo *Arithmetica infinitorum* (1656).

Ora, fare un elenco di tutti i matematici che si sono occupati delle frazioni continue e dei loro contributi richiederebbe molto spazio. Mi limito a citare alcuni nomi, tra i più famosi, a cominciare dall'indiano Aryabhata (V-VI sec.d.C.), per proseguire con il bolognese Rafael Bombelli (1526 ca. – 1572) e l'olandese Christian Huygens (1629-1695).

Anche dopo Eulero non mancano i matematici che hanno continuato la sua opera e tra loro: l'italo-francese Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813) ed Évariste Galois (1811-1832), geniale e sfortunato giovane francese, il cui primo lavoro, scritto all'età di 17 anni, è dedicato proprio alle frazioni continue: *Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques*. Il lavoro fu pubblicato negli *Annales de mathématiques pures et appliquées: ouvrage périodique rédigé par M. J. D. Gergonne* (1828 et 1829).

Il procedimento da me seguito nella risoluzione dell'esercizio è esattamente quello proposto da Galois.

3. Occupiamoci adesso della seconda espressione:

[2] $$x = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \cdots}}}}$$

dove n è un numero naturale non nullo e dove i puntini di sospensione indicano una sequela di radicali simili ai precedenti.

La tratterò utilizzando l'analogia con l'espressione [1], per cui ripeterò pedissequamente cose già dette riguardo a quella espressione, adattandole naturalmente alla nuova espressione.

Si tratta di un caso particolare di espressioni aventi la forma seguente:

$$a = \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots}}}}$$

dove $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono numeri interi positivi. Per analogia appunto alle espressioni trattate prima, le definiamo *radicali continui*,

Se l'espressione si arresta ad uno dei numeri $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, il radicale continuo si dice *limitato*, se invece si estende all'infinito si dice *illimitato*. Se poi, da un certo punto in avanti, i numeri a_k sono uguali fra loro, il radicale si dice *periodico*.

In particolare, l'espressione [2] è un esempio di *radicale continuo illimitato periodico*.

In genere, il valore dell'espressione a è un numero reale positivo, facilmente calcolabile, se essa è limitata. Nel caso invece in cui si estenda all'infinito, tale valore è il limite della successione:

$$\sqrt{a_0}\,,\quad \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1}}\,,\quad \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}}}\,,\quad \sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3}}}}\,,\quad \ldots$$

vale a dire della successione i cui termini si ottengono arrestando l'espressione a al 1° radicale o al 2° o al 3° e così via. Termini che, anche adesso, possono essere chiamati *ridotte di ordine* 1 o 2 o 3, eccetera.

In realtà, come con l'altra espressione, è mia intenzione occuparmi solamente del radicale [2] e senza coinvolgere i limiti.

Mi propongo precisamente di risolvere le seguenti questioni:

a) dimostrare che esistono valori di n per i quali i valori di x sono numeri naturali e trovare questi valori e, inoltre, dimostrare che x è un numero irrazionale per ogni altro valore di n e trovare questo numero;
b) dimostrare che esiste uno ed un solo valore di n per il quale x=n;
c) stabilire se esiste un valore di n per il quale x è il numero aureo $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

RISOLUZIONE. Anzitutto si costata che l'espressione x può essere scritta nel modo seguente:

$$x = \sqrt{n + x} \quad \text{da cui segue:} \quad x^2 - x - n = 0\,.$$

a) Risolviamo questa equazione in x, che certamente ammette due radici reali, una positiva e l'altra negativa, prendendo naturalmente la sola radice positiva:

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4n}}{2}.$$

Osserviamo intanto che il valore trovato è un numero razionale se e solo se $1+4n$ è un quadrato perfetto. Il che, dovendo essere n un numero naturale non nullo, accade se e solo se $n=k^2+k$, dove k è a sua volta un numero naturale non nullo. In tal caso, dopo aver costatato che $1+4n=(2k+1)^2$, a conti fatti risulta $x=k+1$. Per cui anche x è un numero naturale

Insomma, x è il numero naturale $k+1$ se $n=k^2+k=k(k+1)$, dove k è un qualsiasi numero naturale non nullo. Vale a dire che, se n è il prodotto di due naturali consecutivi – $1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4,\ \dots, k\cdot(k+1), \dots$ – il numero x è nell'ordine uguale a $2, 3, 4, \dots, k, \dots$.

Dalla conclusione precedente si evince che x giammai potrà essere un numero razionale, a meno che non sia intero. Come dire che x è un numero irrazionale per valori di n diversi da k^2+k. Questo numero irrazionale è il seguente:

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}\ ,\quad \text{purché } n \neq k^2+k, \text{ dove k è un naturale non nullo.}$$

b) Sempre in virtù di quanto trovato nella risoluzione del punto a), affinché esista un valore di n per il quale risulti $x=n$, deve accadere che sia: $k^2+k = k+1$, ossia $k=1$, In tal caso si ha: $x=n=2$. Il che implica la seguente relazione:

$$2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}.$$

c) Riprendendo l'equazione $x^2-x-n=0$, sostituiamo φ al posto di x. Anche adesso, come nell'altra espressione, si trova il valore $n=1$. E, come nell'altro caso, anche questo si poteva intuire immediatamente. Questo significa che il numero aureo si può mettere pure nella forma seguente, anch'essa conosciuta:

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}.$$

BREVE NOTA STORICA.

Per quanto ne sappia, il primo studioso ad occuparsi di *radicali continui*, che qualcuno chiama *radicali nidificati*, fu l'abate genovese Ambrogio Multedo (1753-1840), professore di matematica nell'Università di Genova. Il lavoro in cui egli ne parla fu pubblicato il 10 maggio 1812 a Genova.

Detto *en passant*, Multedo rappresentò il Senato genovese nella commissione che a Parigi, nel 1791, sotto la presidenza di Lagrange, definì il primo sistema metrico decimale, antesignano dell'attuale SI (Sistema Internazionale).

Cito dalle Memorie dell'Accademia delle Scienze, Lettere ed Arti di Genova.

> Memoria delle serie infinite a radicali continui
> per la soluzione delle equazioni, del Prof. Multedo,
> letta e presentata al Secretario dell'Accademia li 10 maggio 1812:
> *In questa memoria apro una nuova strada alla soluzione delle equazioni*
> *per mezzo di una nuova specie di serie, a quali ho dato nome di serie a* radicali continui.
> *[...]*
> *Chiamo serie a* radicali continui *quelle che sono espressioni di radicali a l'infinito,*
> *avendo sempre un radicale sovraposto alle quantità, e radicali simili successivi*.

Dopo Multedo altri studiosi, fino ai giorni nostri, si sono occupati dell'argomento, ampliandolo e approfondendolo. Ne cito due: entrambi sono indiani ed entrambi hanno lavorato, quantunque in momenti diversi, con il matematico inglese Godfrey Harold Hardy (1877-1947). Sono per la precisione: Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920), che si è pure occupato delle frazioni continue, e Tirukkannapuram Vijayaraghavan (1902-1955).

4. OSSERVAZIONE. Sia nelle frazioni continue illimitate periodiche [1] sia nei radicali continui illimitati periodici [2] il periodo è costituito da una sola cifra.

Ma, in realtà, le cifre che formano il periodo potrebbero essere di più. Vediamo allora cosa accade se, tanto per fissare le idee, le cifre sono due, per esempio n ed m, entrambe non nulle. La frazione e il radicale diventano rispettivamente:

$$[3]\quad x = n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{m + \cdots}}}\,, \qquad [4]\quad x = \sqrt{n + \sqrt{m + \sqrt{n + \sqrt{m + \cdots}}}}\,.$$

- Ragioniamo sulla [3] e costatiamo che essa può essere scritta in questo modo:

$$x = n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{x}}\,, \quad \text{da cui segue:} \quad m\,x^2 - n\,m\,x - n = 0\,.$$

Quest'equazione ha certamente due radici reali, una positiva e l'altra negativa. Solo la prima è accettabile. Pertanto, prendendo appunto la sola radice positiva, il valore di x è il seguente:

$$x = \frac{n\,m + \sqrt{n^2m^2 + 4\,nm}}{2\,m}.$$

In particolare, se n=2 ed m=1, si ha:

$$x = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = 1 + \sqrt{3}\,.$$

Cosicché:

$$1 + \sqrt{3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}\,.$$

- Ragioniamo adesso sulla [4] e osserviamo che essa può essere scritta nel modo seguente:

$$x = \sqrt{n + \sqrt{m + x}}\,, \quad \text{da cui segue:} \quad x^2 - n = \sqrt{m + x} \quad \text{e perciò, a conti fatti:}$$

$$x^4 - 2\,n\,x^2 - x + (n^2 - m) = 0, \quad \text{con } x > \sqrt{n}\,.$$

La prosecuzione per trovare il valore di x, anche per specifici valori di n ed m, si complica se si vuole ricorrere a metodi algebrici poiché bisognerebbe risolvere un'equazione di 4° grado, cosa appunto non semplice. Si può far ricorso, come nel caso generale, alla teoria dei limiti delle serie numeriche, ma in tal caso bisogna accontentarsi di un valore approssimato di x. Oppure, infine, utilizzare uno strumento di calcolo automatico, purché anche in questo caso ci si accontenti di un valore approssimato (1) di x.

Per esempio, se n=2 ed m=1, nel qual caso l'equazione diventa $x^4 - 4\,x^2 - x + 3 = 0$, un idoneo software matematico permette di trovare due valori reali positivi per x: $x_1 \approx 0{,}8092$ e $x_2 \approx 1{,}9263$, ma dovendo essere $x > \sqrt{2} \approx 1{,}41$, solo il secondo è accettabile.

Altro esempio: se n=2 ed m=4, nel qual caso l'equazione diventa $x^4 - 4\,x^2 - x = 0$, una radice è evidentemente $x_1 = 0$, mentre un idoneo software matematico fornisce altre tre radici reali: $x_2 \approx -1{,}8608$, $x_3 \approx -0{,}2541$, $x_4 \approx 2{,}1149$. Ovviamente, solo l'ultima è accettabile.

La chiudo qui, rinviando a testi specializzati chi volesse saperne di più sull'argomento.

La matematica è la scienza che offre la miglior opportunità di osservare come funziona la mente.
Nicolas de Condorcet, matematico e filosofo francese, 1743-1794
[Fonte: Candido Sitia (a cura di), *La didattica della matematica oggi*, Bologna, Pitagora, 1979, pag. 18.]

---

[1] Ad onor del vero il software "MATHEMATICA" permette di trovare il valore "esatto" di x, ma l'espressione relativa è così complicata da far preferire il valore approssimato.