Tema: Formule matematiche (forse) poco conosciute.
di Antonino Giambò

1. L'uso di formule, all'interno della Matematica e non solo, è assai frequente, oserei dire che è una costante. In realtà, se non se ne facesse uso, i procedimenti risolutivi si rivelerebbero estremamente prolissi, noiosi e soprattutto complicati. E probabilmente il loro mancato uso impedirebbe, o almeno rallenterebbe, il progresso della matematica. Basti pensare al rapido sviluppo della nostra disciplina dopo l'invenzione del formalismo algebrico. Giusto per precisare, in circa 150 anni, dalla prima metà del Seicento alla seconda metà del Settecento, la matematica progredì più di quanto non aveva fatto in tutte le epoche precedenti.

Insomma, non si può fare a meno delle formule matematiche.

In questo articolo mi soffermo su alcune formule, che, pur essendo note ai matematici, potrebbero essere ignorate dagli studenti, ai quali invece farebbero comodo.

Ed è proprio agli studenti, e specialmente a quelli delle ultime classi dei licei scientifici e degli istituti tecnici industriali, che è rivolto questo contributo.

2. Incominciamo con una formula per il calcolo dell'area di un segmento parabolico.

Tutti gli studenti conoscono la regola di Archimede, idonea per questo calcolo, sia nel caso in cui il segmento parabolico è individuato da una corda perpendicolare all'asse di simmetria della parabola (figura 1), sia nel caso in cui la corda è inclinata rispetto a tale asse (figura 2).

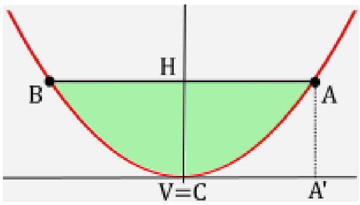

figura 1

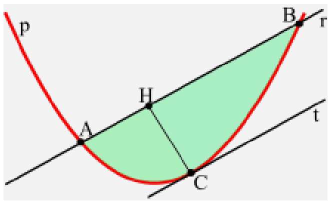

figura 2

In entrambi i casi l'area S del segmento parabolico è uguale ai $2/3$ dell'area del rettangolo di dimensioni AB e CH, per cui essa è data dalla seguente formula:

$$S=\frac{2}{3}\,\overline{AB}\cdot\overline{CH}\,.$$

Se poi si considera l'area T del triangolo mistilineo CA'A (figura 1), si ottiene facilmente:

$$T=\frac{1}{3}\,\overline{HA}\cdot\overline{CH}\,.$$

Ma forse non tutti sanno che, se la parabola è assegnata in un piano cartesiano (Oxy) ed ha l'asse parallelo all'asse delle ordinate, per cui la sua equazione è $y=ax^2+bx+c$, e se la corda della parabola che individua il segmento parabolico ha estremi A e B, di ascisse rispettivamente x_A e x_B, con $x_A>x_B$, allora l'area S del segmento parabolico è data dalla seguente formula:

$$S=\frac{|a|}{6}(x_A-x_B)^3.$$

Ne fornisco la dimostrazione a beneficio di chi ne fosse interessato.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo dapprima che l'equazione della parabola sia $y=ax^2$, con $a>0$ (figura 3).

L'area S del segmento parabolico determinato dalla retta AB, dove $A\left(x_A,ax_A^2\right)$ e $B\left(x_B,ax_B^2\right)$, si ottiene sottraendo dall'area del trapezio AA'B'B quelle dei due triangoli mistilinei OA'A e OB'B.

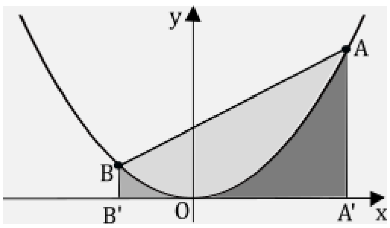

figura 3

Ora, come visto sopra:

- area triangolo mistilineo $OA'A = \frac{1}{3}\,\overline{OA'}\cdot\overline{A'A} = \frac{1}{3}\,x_A \cdot a\,x_A^2 = \frac{1}{3}\,a\,x_A^3$;
- area triangolo mistilineo $OB'B = \frac{1}{3}\,\overline{OB'}\cdot\overline{B'B} = \frac{1}{3}(-x_B)\cdot a\,x_B^2 = -\frac{1}{3}\,a\,x_B^3$.

D'altro canto:

- area trapezio $AA'B'B = \frac{1}{2}\left(\overline{A'A}+\overline{B'B}\right)\cdot\overline{A'B'} = \frac{1}{2}\left(ax_A^2+ax_B^2\right)(x_A-x_B)$.

Pertanto l'area S del segmento parabolico è:

$$S = \frac{1}{2}\left(ax_A^2+ax_B^2\right)(x_A-x_B)-\left(\frac{1}{3}ax_A^3-\frac{1}{3}ax_B^3\right) = \frac{1}{2}a\left(x_A^2+x_B^2\right)(x_A-x_B)-\frac{1}{3}a\left(x_A^3-x_B^3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}a(x_A-x_B)\left(x_A^2+x_B^2\right)-\frac{1}{3}a(x_A-x_B)\left(x_A^2+x_Ax_B+x_B^2\right) = \frac{a}{6}(x_A-x_B)(x_A-x_B)^2 = \frac{a}{6}(x_A-x_B)^3 .$$

Si capisce che, se l'equazione della parabola è $y=ax^2$ con $a<0$, l'area S del segmento parabolico è:

$$S = -\frac{a}{6}(x_A - x_B)^3 .$$

Le due formule trovate si possono riassumere nella formula seguente:

$$S = \frac{|a|}{6}(x_A - x_B)^3 .$$

Essa continua a sussistere anche se la parabola ha un'equazione del tipo $y=ax^2+bx+c$. Basta tener presente che una traslazione che porti il suo vertice nell'origine del sistema di riferimento ha equazioni del tipo: $(X=x+p,\ Y=y+q)$ e si ha pertanto $X_A - X_B = x_A - x_B$, mentre l'equazione della parabola diventa $Y=aX^2$.

OSSERVAZIONE. Nel caso particolare in cui la parabola ha equazione $y=ax^2$ e la corda AB è perpendicolare al suo asse, per cui $x_B=-x_A$, l'area S del segmento parabolico assume la forma seguente:

$$S=\frac{|a|}{6}\cdot(2\,x_A)^3=\frac{2}{3}\cdot 2\,x_A\cdot\left|a\,x_A^2\right|,$$

che è un modo equivalente di scrivere la formula di Archimede.

3. Una seconda formula riguarda il calcolo di un volume.

Si consideri, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), la superficie S delimitata dalla curva di equazione $y=f(x)$, supposta continua e non negativa per $a\le x\le b$, dall'asse x e dalle rette $x=a$ e $x=b$.

Ogni studente di 5ª superiore, che sappia un po' di analisi matematica, conosce la formula che fornisce il volume del solido generato da S in una rotazione completa intorno all'asse x, nell'ipotesi che S non attraversi tale asse, vale a dire:

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx .$$

Ma probabilmente molti ignorano che esiste anche una formula per il volume del solido generato da S quando ruota di un giro completo intorno all'asse y, nell'ipotesi che S non attraversi tale asse.

Ebbene, questa formula è la seguente:

$$V = 2\pi\int_a^b x\,|f(x)|\,dx .$$

Essa è valida in generale, ma mi limito a dimostrarla nel caso in cui f(x) si mantenga positiva e crescente nell'intervallo [a,b], per cui, in tale intervallo: $|f(x)|=f(x)$.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ gli estremi dell'arco della curva $y=f(x)$ che ci interessa prendere in considerazione. Indichiamo inoltre con C e D le proiezioni ortogonali di A e B rispettivamente sull'asse x e con H e K quelle sull'asse y (figura 4). La superficie S è il trapezoide CDBA.

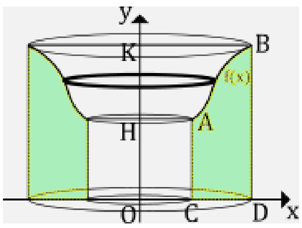

figura 4

Possiamo costatare che il solido generato da S, in una rotazione completa intorno all'asse y, è costituito dal cilindro generato dal rettangolo ODBK (il cui volume è $\pi b^2 f(b)$), incavato sia dal cilindro generato dal rettangolo OCAH (il cui volume è $\pi a^2 f(a)$) sia dal solido generato dal quadrilatero mistilineo HABK.

Il volume $\overline{V}$ di quest'ultimo solido può essere concepito come la somma di infiniti elementi infinitesimi $d\overline{V}$, il generico dei quali si ottiene intersecando il solido con uno strato di altezza infinitesima df(x), delimitato da due piani perpendicolari all'asse y. Considerato che il solido di volume infinitesimo $d\overline{V}$ altro non è che il cilindro infinitesimo di raggio di base x e altezza df(x), si ha: $d\overline{V} = \pi\, x^2\, df(x)$. Pertanto: $\overline{V} = \pi \int_a^b x^2\, df(x)$. Ora, integrando per parti questo integrale (f.f.=x^2, f.d.=df(x)), si trova:

$$\int x^2\, df(x) = x^2\, f(x) - \int 2\, x\, f(x)\, dx\,.$$

E dunque:

$$\int_a^b x^2\, df(x) = [x^2 f(x)]_a^b - 2\int_a^b x\, f(x)\, dx = b^2\, f(b) - a^2\, f(a) - 2\int_a^b x\, f(x)\, dx\,.$$

In definitiva, il volume V cercato è tale che:

$$V = \pi\, b^2\, f(b) - \pi\, a^2\, f(a) - \pi\left\{b^2\, f(b) - a^2\, f(a) - 2\int_a^b x\, f(x)\, dx\right\} = 2\,\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx\,.$$

4. La *formula dei trapezi*, conosciuta anche come *formula di Bézout*, dal nome del matematico francese Étienne Bézout (1730-1783), usata per il calcolo approssimato di un integrale definito, è probabilmente nota a tutti gli studenti di una 5ª superiore. Per cui quello che diremo su questa formula potrebbe rivelarsi pleonastico.

Per esempio, supposto di voler calcolare un valore approssimato dell'integrale della funzione f(x), relativo all'intervallo [a,b], nel caso particolare in cui tale intervallo è suddiviso in 2 intervalli di uguale ampiezza, la formula di approssimazione è:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{2}\cdot\big(f(a) + f(m)\big) + \frac{h}{2}\cdot\big(f(m) + f(b)\big)\,,$$

dove h è una lunghezza pari alla metà dell'intervallo [a,b], che è lungo b–a, dunque $h=\frac{b-a}{2}$; mentre m è il valore medio di questo intervallo, cioè $m=\frac{a+b}{2}$. Pertanto, dopo aver sostituito e semplificato:

[1] $$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{4}\cdot\left\{f(a) + 2\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}.$$

Una figura (figura 5), dove l'integrale è assimilato all'area sotto il grafico della funzione f(x), evidenzia come la funzione sia interpolata con polinomi lineari, ossia, detto in termini grafici, con segmenti di retta.

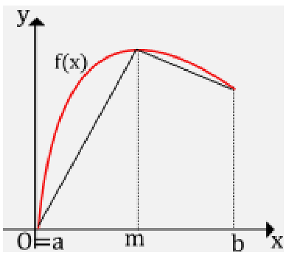

figura 5

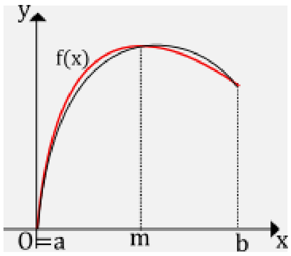

figura 6

Ma questa formula d'integrazione approssimata è una delle tante.

Un'altra è la **formula di Simpson**, dal nome del matematico inglese Thomas Simpson (1710-1761). E forse questa formula non è conosciuta da tutti gli studenti.

Per esempio, sempre nel presupposto di voler calcolare un valore approssimato dell'integrale della funzione f(x), relativo all'intervallo [a,b], nel caso particolare in cui tale intervallo sia suddiviso in 2 intervalli di uguale ampiezza, la formula di approssimazione è la seguente:

$$\text{[2]} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\cdot\left\{f(a)+4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}.$$

Una figura (figura 6), dove di nuovo l'integrale è assimilato all'area sotto il grafico della funzione f(x), evidenzia come la funzione sia interpolata questa volta con un polinomio quadratico, ossia, detto in termini grafici, con un arco di parabola avente l'asse parallelo all'asse y e passante per i punti del grafico di f(x) di ascisse a, m, b.

- L'approssimazione che si ottiene utilizzando la [2] è migliore di quella che si ottiene usando la [1].

Vediamo al riguardo un esempio, con riferimento al seguente integrale, dove la funzione integranda è esattamente quella rappresentata sia in figura 5 sia in figura 6:

$$J=\int_0^2 \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Il suo valore, a conti fatti, è il seguente:

$$J=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^2=\frac{1}{2}\ln 5\approx 0{,}8047\,,$$

dove l'approssimazione è esatta fino al quarto decimale.

Ora, tenendo presente che la funzione da integrare è $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, ricorrendo alla formula [1], si trova:

$$J_1=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{2}{5}\right)=\frac{7}{10}=0{,}7\,;$$

per cui, prendendo J_1 al posto di J, si commette il seguente errore relativo:

$$\varepsilon'_r=\frac{J-J_1}{J}=\frac{0{,}8047-0{,}7}{0{,}8047}\approx 13\%\,.$$

Se si ricorre invece alla formula [2], si ottiene:

$$J_2=\frac{1}{3}\cdot\left(2+\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}=0{,}8\,;$$

per cui, prendendo J_2 al posto di J, si commette il seguente errore relativo:

$$\varepsilon''_r=\frac{J-J_2}{J}=\frac{0{,}8047-0{,}8}{0{,}8047}\approx 0.5\%\,.$$

- Ci sono vari modi di dimostrare la formula [2]. Noi lo faremo utilizzando la formula [1] e la regola di Archimede. Come al solito, assimiliamo l'integrale definito della funzione f(x), relativo all'intervallo [a,b], con l'area sotto il grafico della funzione (figura 7) e indichiamo con A il valore dell'area ottenuto con la formula [2] e con A_1 quello ottenuto con la formula [1].

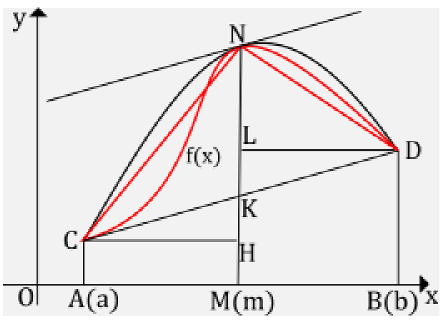

figura 7

Supponiamo $A>A_1$, come in figura, ma ragionamento e risultato non cambiano se $A_1>A$.

Allora, sotto ipotesi che sia $A>A_1$, esiste un'area A_2 tale che $A-A_1=A_2$. Pertanto, nota A_1 in virtù della formula [1], se si riesce a calcolare A_2 si conosce ovviamente il valore di A.

Ora, sempre con riferimento alla figura 5, si costata quanto segue:

A = area trapezio ABDC + area segmento parabolico CDN,

A_1 = area trapezio ABDC + area triangolo CDN.

Dunque:

$A_2 = A - A_1 =$ area segmento parabolico CDN – area triangolo CDN.

D'altro canto, tenendo presente che la tangente alla parabola nel punto N è parallela alla retta CD e ricordando la regola di Archimede, una volta indicata con h la distanza di N dalla retta CD, si trova:

$$A_2 = \frac{2}{3}\,\overline{CD}\cdot h - \frac{1}{2}\,\overline{CD}\cdot h = \frac{1}{6}\,\overline{CD}\cdot h = \frac{1}{3}\text{ area triangolo CDN.}$$

Occupiamoci allora dell'area di questo triangolo. Tenendo presente che CH=LD, si ha:

$$\text{area triangolo CDN} = \text{area triangolo CKN} + \text{area triangolo KDN} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\overline{KN}\cdot\overline{CH} + \frac{1}{2}\,\overline{KN}\cdot\overline{LD} = \frac{1}{2}\,\overline{KN}\cdot 2\,\overline{CH} = \overline{KN}\cdot\overline{CH}\,.$$

A questo punto, osservato che:

$$\overline{KN} = y_N - y_K = f(m) - \frac{f(a)+f(b)}{2}\,,\quad \overline{CH} = x_H - x_C = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}\,,$$

si ha:

$$A_2 = \frac{b-a}{6}\cdot\left(f(m) - \frac{f(a)}{2} - \frac{f(b)}{2}\right).$$

Di modo che, ricordando ancora una volta che il valore di A_1 è fornito dalla formula [1], risulta:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{b-a}{4}\cdot\big(f(a) + 2\,f(m) + f(b)\big) + \frac{b-a}{6}\cdot\left(f(m) - \frac{f(a)}{2} - \frac{f(b)}{2}\right).$$

Da qui, a conti fatti e ricordando che $m=\frac{a+b}{2}$ e $\frac{b-a}{2}=h$, segue:

$$A = \frac{h}{3}\cdot\{f(a) + 4\,f(m) + f(b)\}\ \text{ o anche }\ A = \frac{b-a}{6}\cdot\left\{f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\}.$$

Che è quello che si voleva dimostrare.

- Abbiamo ragionato sull'ipotesi che l'intervallo di integrazione [a,b] fosse diviso in 2 intervalli uguali.

Nella pratica, al fine di ottenere approssimazioni migliori, si utilizzano però suddivisioni più numerose ed ovviamente le formule, sia dei trapezi sia di Simpson, vanno adattate alle diverse situazioni. Ma quanto detto sopra costituisce la base per questo adattamento.

Nel caso della formula dei trapezi, la formula di approssimazione, con una suddivisione dell'intervallo [a,b] in n intervalli della stessa ampiezza $h=\frac{b-a}{n}$, mediante i punti di divisione $a=x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=b$, si ricava facilmente. Si tratta sostanzialmente di sommare le aree di n trapezi aventi tutti la stessa altezza h (figura 8, dove n=8).

Pertanto:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\cdot\{(f(x_0)+f(x_1))+(f(x_1)+f(x_2))+\ldots+(f(x_{n-1})+f(x_n))\} = \frac{b-a}{2\,n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_k)+f(x_{k+1})\big)\,.$$

Formula che per n=2 si particolarizza ovviamente nella [1].

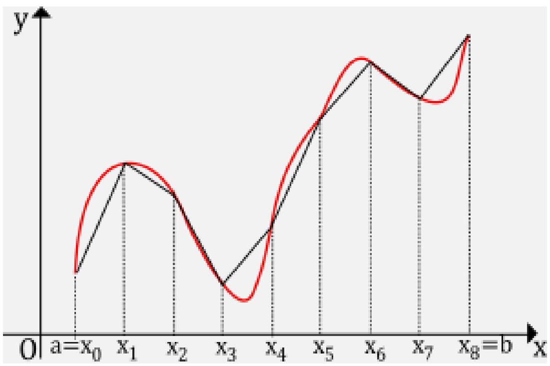

figura 8

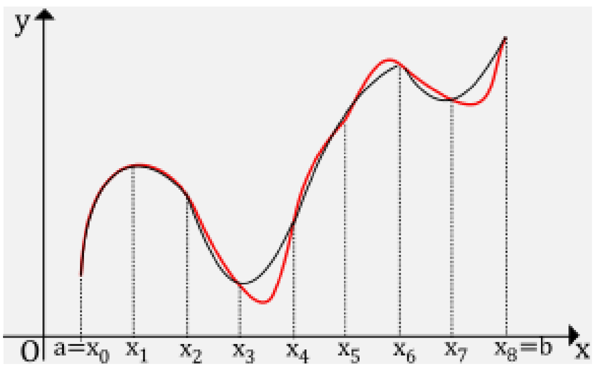

figura 9

Appena più complicata è la ricerca della formula di Simpson nel caso generale. Anche adesso l'intervallo [a,b] è suddiviso in n intervalli di uguale ampiezza h (figura 9, dove n=8) mediante i punti $a=x_0, x_1, x_2$, ..., $x_{n-1}, x_n=b$.

Bisogna poi calcolare la somma di $n/2$ termini, ciascuno dei quali ottenuto utilizzando la formula [2]. Precisamente:

- considerando il polinomio quadratico interpolatore relativo ai punti x_0, x_1, x_2, il primo addendo è: $A^{(1)} = \frac{h}{3} \cdot \{f(x_0) + 4\, f(x_1) + f(x_2)\}$;
- considerando il polinomio quadratico interpolatore relativo ai punti x_2, x_3, x_4, il secondo addendo è: $A^{(2)} = \frac{h}{3} \cdot \{f(x_2) + 4\, f(x_3) + f(x_4)\}$;
- … ;
- considerando il polinomio quadratico interpolatore relativo ai punti x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, l'ultimo addendo è: $A^{(n/2)} = \frac{h}{3} \cdot \{f(x_{n-2}) + 4\, f(x_{n-1}) + f(x_n)\}$.

Pertanto:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3} \cdot \sum_{k=0}^{n/2-1} \left(f(x_{2k}) + 4\, f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})\right).$$

Oppure, tenendo presente che x_{2k+1} è il valore medio di x_{2k} e x_{2k+2} e ricordando che $h=\frac{b-a}{n}$, si ottiene:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{3\, n} \cdot \sum_{k=0}^{n/2-1} \left(f(x_{2k}) + 4\, f\left(\frac{x_{2k} + x_{2k+2}}{2}\right) + f(x_{2k+2})\right).$$

Formula che per $n=2$ assume la forma [2].

- Si può costatare che, mentre nel caso della formula dei trapezi il numero n delle divisioni dell'intervallo [a,b] può essere un numero qualunque, nel caso della formula di Simpson questo numero deve essere un numero pari. Solo per n pari, infatti, è possibile raggruppare i punti di divisione in modo che si possano ottenere polinomi quadratici, ovvero in questo modo:

$$x_0, x_1, x_2; \quad x_2, x_3, x_4; \quad x_4, x_5, x_6; \quad \dots \quad ; \quad x_{n-2}, x_{n-1}, x_n.$$

- OSSERVAZIONE. La formula dei trapezi e la formula di Simpson rientrano nella categoria "metodi d'integrazione numerica": svolgevano un ruolo importante fino ad alcuni decenni fa. Oggigiorno, nell'era del computer, pur continuando ad avere rilievo sul piano storico, la loro rilevanza effettiva è circoscritta al campo informatico. L'uso di idonei software matematici li rende infatti superflui quando si deve calcolare il valore approssimato di un integrale definito, ma i programmi per l'elaborazione di tali software sono di fatto basati su quelle formule o su formule equivalenti.

> *Il formalismo algebrico aveva fatto costanti progressi a partire dal Rinascimento e raggiunse il suo massimo sviluppo ne* La gèomètrie *di Descartes* (1)*, il più antico testo matematico che uno studente di algebra odierno potrebbe leggere senza incontrare difficoltà nella notazione*.
> [Carl B. Boyer (2), *Storia della matematica*, Milano, Oscar Studio Mondadori, 1980, pagg. 387-388]

---

[1] René Descartes (italianizzato Renato Cartesio), filosofo e matematico francese, 1596-1650.
La gèomètrie è una delle tre appendici dell'opera *Discours de la méthode*, che Cartesio pubblicò nel 1637.

[2] Carl Benjamin Boyer, matematico statunitense e storico della matematica, 1906-1976