Tema: Indovina il numero … in una successione.

di Antonino Giambò

1. È bizzarro che una particolare idea matematica del tutto sbagliata si sia andata affermando a tal punto da invadere ogni campo della società, compresa la scuola, l'università, gli enti privati e pubblici.

Qual è questa idea? È ciò di cui intendo occuparmi in questo contributo. Ma andiamo con ordine.

Alcuni anni fa pubblicai un articolo [1] che voleva essere una critica a coloro che propongono quesiti in cui, assegnati alcuni numeri in successione, bisogna trovare il numero che "logicamente" li segue.

Per esempio, datti i numeri 2-3-5-8, quale numero dopo di essi?

E ci si aspetta di trovare un solo numero, eventualmente da scegliere in un dato insieme.

La critica che muovevo poggiava sul fatto che quesiti come questi, in realtà, non ammettono una sola risposta corretta ma addirittura infinite e per questa ragione sono ambigui.

Ora, finché quesiti siffatti sono proposti per puro divertimento su riviste di moda o di sport o su quotidiani, passi pure: al più possono causare un mal di testa a chi cerca di risolverli. Ma quando sono proposti per sondare capacità analitiche e figurano in testi scolastici e addirittura nelle prove di selezione del personale da assumere, allora la cosa diventa seria e preoccupante. Trattandosi, come ho detto, di quesiti ambigui, come si fa a pensare che possano fornire indicazioni utili a qualcosa? A meno che non si cerchino soggetti che siano in grado di indovinare cosa passi per la mente di chi li ha proposti.

E la realtà ancora più dura da accettare è che purtroppo quesiti analoghi sono utilizzati anche per selezionare il personale da assumere in enti statali. Per lo meno è così per il Ministero per i beni e le attività culturali (MiBACT), anche se forse non in maniera diretta ma attraverso agenzie di supporto. Chi avesse voglia di verificare quanto sto dicendo può collegarsi al sito web http://www.mininterno.net/begint.asp?ida=4479.

Qualcuno, a questo punto, potrebbe domandarsi perché quei quesiti sono ambigui.

Ebbene, a costo di ripetermi, ma con la segreta speranza che il messaggio possa giungere a chi di dovere, ritorno più diffusamente su questo argomento.

2. Tutto poggia sul seguente teorema:

Assegnati n numeri in successione, per ogni numero pensato (che segua gli n numeri o che li preceda o sia inserito fra essi), esiste almeno una legge matematica che permette di generare gli n numeri assegnati e quello pensato, nella successione proposta.

Verificheremo questo teorema nel caso specifico in cui i numeri assegnati siano proprio i 4 numeri suddetti, vale a dire i numeri 2-3-5-8, e si richieda di trovare quale numero li segua logicamente.

Verificheremo precisamente che, <u>per ogni numero pensato</u> α, esiste una legge matematica $A_n=f(n)$ che, oltre a generare i 4 numeri assegnati nei rispettivi posti (n=1,2,3,4), riproduce, per n=5, il numero α.

Una legge idonea potrebbe essere del tipo seguente (ma anche di tipo diverso):

$A_n = a\,n^4 + b\,n^3 + c\,n^2 + d\,n + e.$

Affinché essa sia determinata occorre ovviamente che siano noti i coefficienti a, b, c, d, e. Per questo incominciamo ad imporre la condizione che per n=1,2,3,4, i valori di A_n siano rispettivamente 2, 3, 5, 8. Si ottiene in questo modo il seguente sistema di 4 equazioni nella 5 incognite a, b, c, d, e:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=2 \\ 16a+8b+4c+2d+e=3 \\ 81a+27b+9c+3d+e=5 \\ 256a+64b+16c+4d+e=8 \end{cases}$$

Si esprimono 4 delle 5 incognite in funzione della quinta (per esempio a) e si ottengono i seguenti valori:

$$b=-10\,a,\quad c=35\,a+\frac{1}{2}\,,\quad d=-50\,a-\frac{1}{2}\,,\quad e=24\,a+2\,.$$

La legge in questione, con la presenza questa volta del solo parametro a, diventa allora:

$$A_n = a\,n^4 - 10\,a\,n^3 + \left(35\,a+\frac{1}{2}\right)n^2 - \left(50\,a+\frac{1}{2}\right)n + (24\,a+2).$$

[1] Antonino Giambò, *Problemi … sotto l'ombrellone*, in Periodico di matematiche, Lug-Set 2006.

A questo punto è chiaro ed evidente anche ad uno studente di prima superiore che al parametro a possono essere attribuiti tutti i valori che si vuole ed ottenere così infinite leggi e tutte generano, per n=1,2,3,4, rispettivamente i numeri 2-3-5-8. Non solo, ma per ogni valore α attribuito ad A_5 (5° numero dopo i suddetti), si ottiene un ben determinato valore di a e, di conseguenza, una determinata legge.

A titolo di esempio:

- per $A_5=12$ si ottiene a=0 e quindi la legge: $A_n=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+2$;
- per $A_5=13$ si ottiene a=1/24 e quindi la legge: $A_n=\frac{1}{24}n^4-\frac{5}{12}n^3+\frac{47}{24}n^2-\frac{31}{12}n+3$;
- per $A_5=-12$ si ottiene a=−1 e quindi la legge: $A_n=-n^4+10\,n^3-\frac{69}{2}n^2+\frac{99}{2}n-22$.

Può essere interessante la rappresentazione grafica delle funzioni y=f(x) che supportano le tre successioni. Lo facciamo fornendo la rappresentazione in un piano cartesiano non monometrico per evidenziare meglio la situazione. Orbene, la rappresentazione grafica conferma ovviamente che i rispettivi grafici passano tutti per i punti (1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 8), ma i punti di ascissa 5 hanno ordinate differenti ed esattamente ordinate 12, 13, −12.

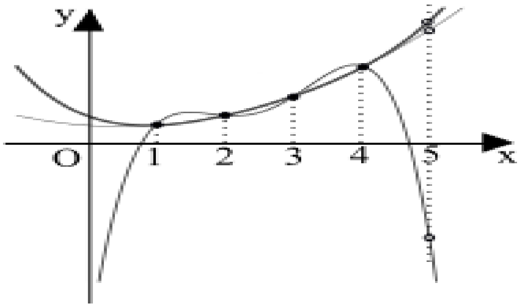

Figura 1

Si può costatare che la prima delle tre leggi è più semplice delle altre, ma questo è del tutto irrilevante.

Dico ciò perché proprio a questa legge pensava l'autore del quesito, anche se il suo ragionamento non è basato precisamente sulla legge su indicata ma consiste nell'osservare intuitivamente che si ha:

- al 1° posto della successione c'è il numero 2,
- al 2° posto il numero 2+1=3,
- al 3° posto il numero 3+2=5,
- al 4° posto il numero 5+3=8;

di conseguenza, estendendo il ragionamento, al 5° posto figura il numero 8+4=12.

La figura sottostante (figura 2) rende bene l'idea.

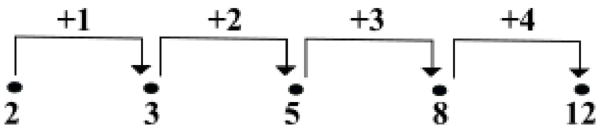

Figura 2

Il ragionamento è certamente elementare e convincente.

Ma lo è altrettanto quest'altro ragionamento:

- al 1° posto della successione c'è il numero 2,
- al 2° posto il numero 3,
- al 3° posto il numero 2+3=5,
- al 4° posto il numero 3+5=8;

di conseguenza, estendendo il ragionamento, al 5° posto figura il numero 5+8=13.

Insomma, lo ribadisco, è del tutto irrilevante che fra le infinite leggi ve ne sia una (o più d'una) più semplice e convincente delle altre.

Osservo, a titolo di curiosità, che è possibile esprimere entrambe queste leggi mediante formule ricorsive. Precisamente:

- riguardo alla prima legge:

$$A_n = \begin{cases} 2 \text{ per } n = 1 \\ A_{n-1} + (n-1) \text{ per } n > 1 \end{cases}$$

- riguardo alla seconda:

$$A_n = \begin{cases} 2 \text{ per } n = 1 \\ 3 \text{ per } n = 2 \\ A_{n-2} + A_{n-1} \text{ per } n > 2 \end{cases}$$

C'è tuttavia una differenza importante fra queste due leggi espresse in forma ricorsiva e le stesse leggi espresse in forma analitica. Precisamente, mentre per la prima di esse l'espressione analitica e quella ricorsiva generano gli stessi valori per ogni n, per la seconda questo accade solo per i primi 5 numeri.

3. Il ragionamento e il procedimento descritti sopra non cambiano se il numero da "indovinare", invece che seguire gli n numeri proposti, li precede o è inserito fra essi.

Ecco, tanto per fornire un esempio, prendo in prestito un quesito proposto proprio nel sito succitato:

Trovare quale numero va messo al posto dell'interrogativo nella seguente successione:
18 ? 48 46 138.
Nel sito è proposta la scelta (una ed una soltanto) fra i seguenti numeri: 17-15-16-14-19.

Ora, è assai probabile che l'autore del quesito pensasse al numero 16 come soluzione, in base al seguente ragionamento intuitivo:

- al 1° posto della successione c'è il numero 18,
- al 2° posto il numero $18 - 2 = 16$,
- al 3° posto il numero $16 \times 3 = 48$,
- al 4° posto il numero $48 - 2 = 46$,
- al 5° posto il numero $46 \times 3 = 138$.

Anche questo ragionamento si può esprimere con una formula ricorsiva, precisamente:

$$A_n = \begin{cases} 18 \text{ per } n = 1 \\ A_{n-1} - 2 \text{ per } n = 2k \text{ (cioè per n pari)} \\ A_{n-1} \times 3 \text{ per } n = 2k+1 \text{ (cioè per n dispari)} \end{cases}$$

essendo k un qualsiasi numero naturale non nullo.

Ma anche se è così, questo non autorizza a pensare che 16 sia l'unica soluzione.

In effetti, per ciascuno dei 5 numeri proposti come alternative, esiste almeno una legge che genera quel numero per n=2 (posto occupato dall'interrogativo) e, nel contempo, riproduce ai loro posti (1-3-4-5) nell'ordine gli altri 4 numeri 18-48-46-138. Il procedimento per trovare queste leggi è lo stesso procedimento seguito poco sopra. Non intendo ripeterlo e mi limito a fornire i risultati.

La legge, con la presenta di un solo parametro e precisamente il coefficiente del termine di grado maggiore, è la seguente:

$$A_n = a\, n^4 + \left(\frac{79}{6} - 13\, a\right) n^3 + (-111 + 59\, a)\, n^2 + \left(\frac{1727}{6} - 107\, a\right) n + (-172 + 60\, a).$$

Da essa si desumono le seguenti leggi particolari:

- per A_2=17, la legge $A_n = \frac{1}{6}(48\, n^4 - 545\, n^3 + 2166\, n^2 - 3409\, n + 1848)$;
- per A_2=15, la legge $A_n = \frac{1}{6}(50\, n^4 - 571\, n^3 + 2284\, n^2 - 3623\, n + 1968)$;
- per A_2=16, la legge $A_n = \frac{1}{6}(49\, n^4 - 558\, n^3 + 2225\, n^2 - 3516\, n + 1908)$;
- per A_2=14, la legge $A_n = \frac{1}{6}(51\, n^4 - 584\, n^3 + 2343\, n^2 - 3730\, n + 2028)$;
- per A_2=19, la legge $A_n = \frac{1}{6}(46\, n^4 - 519\, n^3 + 2048\, n^2 - 3195\, n + 1728)$.

Naturalmente queste 5 leggi generano tutte nei posti n=1, n=3, n=4, n=5 rispettivamente i numeri assegnati 18-48-46-138. Cosa che si può controllare agevolmente.

In conclusione, va bene ciascuno dei 5 numeri proposti come alternative.

Allora, quale numero dovrebbe indicare il candidato chiamato alla prova di selezione del personale per rispondere correttamente? Ovviamente quello che è nella mente dell'autore del quesito, altrimenti sbaglia e l'errore potrebbe pregiudicare la sua assunzione. Assurdo! Inconcepibile!

4. Immagino a questo punto qualche obiezione, come per esempio la seguente, che effettivamente mi è stata mossa: se i numeri assegnati sono 1-2-3-4, come si fa a sostenere che il numero che logicamente li segue possa essere un numero diverso da 5?

L'obiezione sarebbe effettivamente fondata se la richiesta fosse di trovare il numero che segue 1-2-3-4 nella *successione dei numeri naturali*.

Ma se si assegnano quei numeri e, senza alcuna condizione, si richiede di trovare quale numero li segue, vale esattamente quanto abbiamo detto nelle righe precedenti.

Preciso poi che la dicitura "li segue logicamente" (o, in altra situazione, li precede o sia inserito fra essi), che spesso è utilizzata, non determina l'alternativa corretta.

In effetti, ognuna delle leggi che si possono trovare ha una sua logica e quindi è "logicamente corretta".

D'altro canto, per tornare alla successione che stiamo esaminando, chi può negare che una successione possibile sia la seguente, anch'essa logicamente corretta:

1-2-3-4-1-2-3-4-1-2-3-4

e così via con la ripetizione all'infinito della quaterna 1-2-3-4?

Si tratta chiaramente di una successione "lineare a tratti" e non di tipo "polinomiale", come quelle mostrate fin qui, ma questo non significa che non abbia diritto di cittadinanza.

Anche di questa successione possiamo fornire l'espressione analitica:

$$A_n = \begin{cases} 1 \text{ per } n = 4k+1 \\ 2 \text{ per } n = 4k+2 \\ 3 \text{ per } n = 4k+3 \\ 4 \text{ per } n = 4k+4 \end{cases}$$

dove k è un qualsiasi numero naturale.

Volendo, poi, si possono trovare anche successioni di tipo "polinomiale". Basta ragionare nella solita maniera e si ottiene la seguente legge, dipendente da un solo parametro, e precisamente il coefficiente del termine di grado più elevato:

$A_n = a\,n^4 - 10\,a\,n^3 + 35\,a\,n^2 + (1 - 50\,a)\,n + 24\,a.$

Da essa si desumono tutte le leggi che si vuole, in particolare la seguente legge, che è la più semplice e genera la successione dei numeri naturali:

- per $A_5=5$, la legge $A_n=n$, ottenuta per $a=0$.

Ma si desumono anche altre leggi, come per esempio le seguenti:

- per $A_5=29$, la legge $A_n = n^4 - 10\,n^3 + 35\,n^2 - 49\,n + 24$;
- per $A_5=1$, la legge $A_n = -\frac{1}{6}\,n^4 + \frac{5}{3}\,n^3 - \frac{35}{6}\,n^2 + \frac{28}{3}\,n - 4$.

Ovviamente tutte queste leggi presentano i valori 1-2-3-4 nei primi 4 posti ($n=1,2,3,4$) mentre nel 5° posto ($n=5$) generano valori differenti.

5. Quanto detto fin qui implica dunque che i quesiti di cui ci stiamo occupando devono essere esclusi in ogni settore della vita sociale e amministrativa e, in particolare, nella scuola? Certo che no. Sostengo solamente che non possono essere utilizzati come quesiti a risposta chiusa, con una sola risposta valida. Potrebbero però essere adattati opportunamente, per esempio in questo modo:

È assegnata la seguente successione: 2, 3, 5, 8. Tra gli infiniti numeri che possono essere collocati al 5° posto della successione, indicarne uno a scelta e spiegare in modo esauriente in base a quale legge è stato scelto. Indicare poi, in base a questa legge, quale numero occupa il 6° posto (o un altro posto).

Si capisce che, in questo modo, il quesito non può essere proposto come quesito a scelta multipla con una sola alternativa corretta, in cui bisogna limitarsi a segnare con una crocetta questa alternativa, senza fornire spiegazioni di sorta.