Tema: Procedimenti risolutivi non standard
di Antonino Giambò

1. Questa rubrica con i miei modesti contributi – ospitata dalla rivista on-line *Matmedia* – è stata intitolata "curiosità e stranezze nella Matematica".

Ora, per la verità, nel presente articolo non c'è traccia di stranezze ma ci sono alcune curiosità, dovute al fatto che sono affrontati problemi risolti con procedimenti non standard. Per questo motivo, ovviamente, i procedimenti risolutivi esposti vanno bene nei casi presi in esame ma, salvo situazioni particolari, non sono generalizzabili. Non per questo però sono meno interessanti.

2. Incominciamo con il seguente problema.

PROBLEMA. Il perimetro del pentagono ABCDE è 30 cm. Si sa poi che:

$$AB+BC = 7\text{ cm},\quad BC+CD = 10\text{ cm},\quad CD+DE = 15\text{ cm},\quad DE+EA = 17\text{ cm}.$$

Calcolare le misure dei lati del pentagono.

RISOLUZIONE. Di per sé la risoluzione di questo problema è banale sul piano concettuale. Ne parlo per una particolare ragione. È molto probabile che molti affrontino il problema senza riflettere, risolvendo meccanicamente con un procedimento standard il sistema di 5 equazioni in 5 incognite, invischiandosi in una congerie di calcoli.

Faccio notare come invece la risoluzione sia molto semplice ed immediata.

Basta esaminare con attenzione le condizioni poste. Si può allora costatare che dalla prima e terza relazione si desume che la somma dei 4 lati AB, BC, CD, DE è 22 cm, per cui il lato EA misura $30–22=8$ (cm).

Di conseguenza, passando progressivamente dall'ultima relazione alla prima:

$$DE=17–8=9\ (\text{cm}),\quad CD=15–9=6\ (\text{cm}),\quad BC=10–6=4\ (\text{cm}),\quad AB=7–4=3\ (\text{cm}).$$

Allo stesso modo, si potevano prendere in esame la seconda e la quarta relazione. In tal caso si sarebbe trovata per prima la misura di AB e, a seguire, tutte le altre.

3. Un problema di pari livello del precedente.

PROBLEMA. Si consideri la seguente successione ricorsiva:

$$a_n = \begin{cases} x \text{ se } n=0 \\ 2+n-a_{n-1} \text{ se } n>0 \end{cases}$$

dove x è un numero incognito. Provare che la somma dei suoi primi 6 termini non dipende da x, calcolandone il valore.

RISOLUZIONE. Un primo procedimento, direi ordinario, consiste nel calcolare le espressioni dei 6 termini: $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, ed effettuare la loro somma. Lasciamo a chi legge questo procedimento.

Un secondo procedimento, un po' più sofisticato, consiste nel costatare che, per n>0, si ha: $a_n+a_{n-1}=2+n$. Dal che si desume che si ha:

$$a_1+a_0=2+1=3,\quad a_2+a_1=2+2=4,\quad a_3+a_2=2+3=5,\quad a_4+a_3=2+4=6,\quad a_5+a_4=2+5=7.$$

Pertanto, sommando membro a membro:

$$a_0+(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_5=25,$$

o anche, dopo aver costatato che $a_1+a_2+a_3+a_4=4+6=10$:

$$a_0+(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_5=25–10=15$$

4. Un problema più complicato.

PROBLEMA. Internamente ai lati AB e BC del quadrato ABCD si prendano rispettivamente i punti E ed F in modo che i triangoli AED, BFE e CDF abbiano aree nell'ordine: 48 cm², 4 cm² e 60 cm². Si sa inoltre che i punti E ed F dividono i lati AB e BC in parti le cui misure, espresse in metri, sono numeri interi. Calcolare l'area e il perimetro del triangolo DEF.

RISOLUZIONE. Si indicano con x, y, z nell'ordine le misure del lato del quadrato, del segmento AE e del segmento BF (figura 1).

Si ottiene il sistema formato dalle seguenti equazioni:

[1] $$\frac{1}{2}x(x-z)=60, \quad \frac{1}{2}z(x-y)=4, \quad \frac{1}{2}xy=48.$$

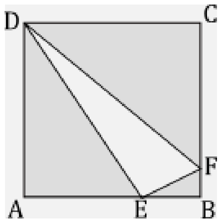

figura 1

Per risolverlo si può procedere in due modi.

Il primo è il modo ordinario di esprimere, per esempio, y e z in funzione di x e di procedere quindi alla risoluzione del nuovo sistema, equivalente al precedente. Non ce ne occupiamo.

Il secondo procedimento, non standard, sfrutta il fatto che x, y, z sono numeri interi positivi dal momento che tali sono le misure dei segmenti AE, EB, BF, FC. Ora, dalla 2ª delle equazioni precedenti si ha: $z(x-y)=8$. Il che (ricordando appunto che x, y, z sono numeri interi positivi) implica uno dei seguenti fatti e non altri:

$$z=1, x-y=8; \quad z=2, x-y=4; \quad z=4, x-y=2; \quad z=8, x-y=1.$$

Si sottopongono ad esame le 4 situazioni:

- $z=1, x-y=8$ ossia $z=1, y=x-8$: la prima delle tre equazioni [1] diventa: $x(x-1)=120$. Questa equazione non ammette radici intere. Situazione da scartare.
- $z=2, x-y=4$ ossia $z=1, y=x-4$: la prima delle tre equazioni [1] diventa: $x(x-2)=120$. Risolvendo e prendendo la sola radice positiva, si trova $x=12$ e, di conseguenza $y=8$. Il sistema è pertanto risolto dai seguenti valori: $x=12, y=8, z=2$. Soluzione accettabile.

Procedendo alla stessa maniera, si trova che anche gli ultimi due casi forniscono soluzioni non accettabili.

In conclusione, l'unica soluzione è quella trovata sopra, ovvero: $x = 12$ cm, $y = 8$ cm, $z = 2$ cm.

La prosecuzione è banale. La chiudiamo qui.

5. Anche il seguente problema si risolve con la stessa tecnica.

PROBLEMA. Un numero di tre cifre, scritto nell'usuale sistema di numerazione decimale, è un quadrato perfetto (è, cioè, il quadrato di un numero naturale). Se ciascuna delle sue cifre è aumentata di una unità, si ottiene ancora un quadrato perfetto. Trovare i due numeri.

RISOLUZIONE. Indicate con a, b, c le tre cifre del primo numero e indicato con p^2 il numero, dove p è a sua volta un numero naturale, se q^2 è il secondo numero, dove q è ancora un numero naturale, deve risultare simultaneamente:

$$100\,a + 10\,b + c = p^2, \quad 100\,(a+1) + 10\,(b+1) + (c+1) = q^2.$$

Tentare di risolvere il sistema delle due equazioni (in 5 incognite!) si potrebbe rivelare un'impresa molto ardua, col rischio di non approdare a nulla di concreto. Conviene seguire una tecnica non standard, quella stessa utilizzata nella risoluzione del problema precedente.

Allora, per prima cosa si sottrae membro a membro la prima delle due precedenti equazioni dalla seconda. Si ottiene: $111=q^2-p^2$.

E da qui, tenendo presente che $111=3\times37$, segue: $(q-p)(q+p) = 3\times37$.

Ora, questa uguaglianza, essendo p, q numeri naturali, è possibile solo in due casi:

1) che risulti: $q-p=3$ e $q+p=37$. Risolvendo si trova: $p=17$, $q=20$. Di modo che i due numeri cercati sono: 289 e 400;

2) oppure che risulti: $q-p=1$ e $q+p=111$. Risolvendo si trova: $p=55$, $q=56$. Di modo che i due numeri sarebbero 3025 e 3136, da scartare giacché quelli cercati sono numeri di tre cifre.

6. Ancora un problema non semplicissimo.

PROBLEMA. Se si somma ciascuno di n numeri incogniti, con $n\geq3$, alla media aritmetica degli altri $n-1$ numeri si ottengono i seguenti n valori noti: $s_1, s_2, \dots, s_n$. Trovare la media aritmetica degli n numeri.

RISOLUZIONE. Indichiamo con $x_1, x_2, \dots, x_n$ gli n numeri incogniti. I dati del problema si traducono nel seguente sistema di n equazioni in altrettante incognite:

$$x_1+\frac{x_2+x_3+\cdots+x_n}{n-1}=s_1,\quad x_2+\frac{x_1+x_3+\cdots+x_n}{n-1}=s_2,\quad \dots\ ,\ x_n+\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}=s_n.$$

La prima idea, probabilmente, è di determinare, *in primis*, gli n numeri incogniti, risolvendo per l'appunto tale sistema. E, una volta trovati gli n numeri, calcolare la loro media aritmetica.

È possibile, ma il procedimento può rivelarsi lungo e complicato, col rischio di trovarsi incagliati in una congerie di calcoli senza poterne venir fuori.

L'aspetto curioso e nel contempo interessante di questo problema è che, in realtà, può essere risolto senza determinare preventivamente i valori incogniti degli n numeri.

A questo proposito, si sommano membro a membro le n uguaglianze precedenti e si ottiene agevolmente la seguente relazione:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)+\frac{\underbrace{(x_2+x_3+\ldots+x_n)+(x_1+x_3+\ldots+x_n)+\cdots+(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})}_{\text{n addendi}}}{n-1}=s_1+s_2+\ldots+s_n.$$

Osservando ora che, in ciascuno degli n addendi al numeratore della frazione precedente manca, nell'ordine e a turno, uno ed uno soltanto dei numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$, si ottiene:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)+\frac{(n-1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{n-1}=s_1+s_2+\ldots+s_n$$

e pertanto:

$$2\,(x_1+x_2+\ldots+x_n)=s_1+s_2+\ldots+s_n\,.$$

Considerato che la media aritmetica M degli n numeri incogniti è:

$$M=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

ne deriva che:

$$M=\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{2\,n}.$$

È questa formula che risolve il problema.

7. Di nuovo un problema che può essere risolto con due procedimenti differenti.

PROBLEMA. P(x) è un polinomio di 3° grado tale che $P(x)=1/x$ quando ad x si assegnano i valori 1, 2, 3, 4. Determinare il polinomio.

RISOLUZIONE. Si possono seguire due procedimenti: uno di routine, semplice sul piano concettuale, ma piuttosto dispendioso a causa della risoluzione di un sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite; l'altro più sofisticato ma anche più economico.

Con il primo procedimento, considerato il polinomio:

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,,$$

s'impongono le condizioni poste dal problema, si risolve il sistema lineare di 4 equazioni nelle 4 incognite a, b, c, d, si trovano tali valori e, di conseguenza, è noto il polinomio. Lasciamo a chi legge di sviluppare questo procedimento.

Con il secondo procedimento, indicato ancora con P(x) il polinomio, si osserva che, per $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$ risulta:

$$P(x)=\frac{1}{x}\,,\qquad \text{da cui } (x\neq 0) \text{ segue}:\quad x\cdot P(x)-1=0\,.$$

Ora, siccome P(x) è un polinomio di 3° grado, $x{\cdot}P(x)$ è evidentemente un polinomio di 4° grado. Di conseguenza, anche $x\cdot P(x)-1$ è un polinomio di 4° grado e precisamente un polinomio che si annulla per $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$. Deve essere perciò:

$$x\cdot P(x)-1=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\quad \text{ossia:}\quad x\cdot P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1\,,$$

dove a è un parametro reale non nullo.

Costatato che il termine noto del polinomio $x{\cdot}P(x)$ è evidentemente uguale a 0, anche il termine noto del polinomio al secondo membro dell'ultima relazione deve essere uguale a 0. E siccome il termine noto di un generico polinomio si ottiene assegnando il valore 0 all'indeterminata, deve risultare:

$$a(-1)(-2)(-3)(-4)+1=0, \quad \text{da cui segue:} \quad a=-\frac{1}{24}.$$

Pertanto:

$$P(x)=\frac{1}{x}\left\{-\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1\right\}.$$

Ossia, a conti fatti:

$$P(x)=-\frac{1}{24}x^3+\frac{5}{12}x^2-\frac{35}{24}x+\frac{25}{12}.$$

Si verifica agevolmente che: $P(1)=1$, $P(2)=1/2$, $P(3)=1/3$, $P(4)=1/4$. Vale a dire, come d'altronde deve essere: $P(x)=1/x$ per $x=1, 2, 3, 4$.

Che il secondo procedimento sia realmente più economico del primo, risulterebbe più evidente se, invece di un polinomio di 3° grado (4 condizioni assegnate), fosse richiesta la determinazione di un polinomio di grado maggiore di 3 e quindi l'assegnazione di un numero di condizioni maggiore di 4.