

## La trigonometria nei quesiti degli esami di Stato

### Domenico Bruno

Che la trigonometria sia di limitata utilità nelle applicazioni è poi un'affermazione assolutamente infondata. Essa viene assai utilmente adoperata nella geometria elementare, nella geometria analitica, nella fisica: a queste sue applicazioni è stato dato ampio spazio nei quesiti che costituiscono la seconda delle due parti in cui si articola la prova scritta di matematica agli esami di Stato di liceo scientifico.

Le applicazioni alla geometria analitica si trovano già nei problemi, che costituiscono la prima parte della prova, al fine, ad esempio, di determinare l'angolo di due rette o l'angolo sotto il quale una curva taglia l'asse delle ascisse o quello delle ordinate.

Le applicazioni alla geometria elementare trovano posto nei 5 quesiti che qui di seguito si riportano (in calce sono date le relative soluzioni):

1. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo, approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

$$\alpha = 28^{\circ} 57'; \beta = 46^{\circ} 34'; \gamma = 104^{\circ} 29'$$

2. I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.

$$\gamma = 45^{\circ} 6'; \beta = 58^{\circ} 2'; \alpha = 61^{\circ} 56'$$

3. Si provi che non esiste un triangolo ABC con  $AB = 3$ ,  $AC = 2$  e  $\widehat{ABC} = 45^{\circ}$ . Si provi altresì che se  $AB = 3$ ,  $AC = 2$  e  $\widehat{ABC} = 30^{\circ}$ , allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1 \quad \operatorname{sen} \gamma' = \frac{3}{4} \quad \gamma'_1 = 48^{\circ} 35' \quad \gamma'_2 = 131^{\circ} 25'$$

4. E' dato un tetraedro regolare di spigolo  $l$  e altezza  $h$ . Si determini l'ampiezza dell'angolo  $\alpha$  formato da  $l$  e da  $h$ .

$$h = \frac{l}{3} \sqrt{6} \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} = 35^{\circ} 16'$$

5. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

$$\operatorname{sen} \alpha = 1 \quad a = \sqrt{13}$$

Le applicazioni alla fisica (segnatamente alla cinematica) le ritroviamo in ben 17 quesiti, che sono stati resi più "accattivanti", introducendo nel loro testo alcuni strani personaggi, fra i quali figura perfino il "mostro di Loch Ness". Eccoli qui riportati:

1. Secondo il codice della strada, il segnale di “salita ripida” preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale (ad esempio 10%).  
Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali) ? Quale la percentuale da riportare sul segnale ?

$$4^{\circ} 4'; \quad 7,1 \%$$

2. Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto B partendo dal punto A e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di  $23^{\circ}$  in modo da dirigere ora esattamente verso il porto B che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore ?

$$5,47 \text{ h}$$

3. Un turista, che osserva un lago scozzese dalla cima di un fiordo alto 100 m, vede spuntare la testa di un mostro acquatico in un punto per il quale misura un angolo di depressione di  $18,45^{\circ}$ . Il mostro, che nuota in linea retta allontanandosi dall'osservatore, si immerge, per riemergere 5 minuti più tardi in un punto per cui l'angolo di depressione vale  $14,05^{\circ}$ . Con che velocità, in metri all'ora, sta nuotando il mostro ?

$$1200 \text{ m/h}$$

4. Un bagnino è seduto su un'alta piattaforma, di modo che i suoi occhi si trovano 7 m sopra il livello del mare. Improvvisamente emerge in superficie la pinna di un grande squalo bianco. Se l'angolo di depressione è di  $4^{\circ}$ , si stimi la distanza orizzontale tra la piattaforma e lo squalo, arrotondando il risultato all'unità.

$$100 \text{ m}$$

5. Una statua alta 70 m viene sistemata su una collina di altezza  $h$ . Da un certo punto A, situato a livello del suolo, gli angoli di elevazione per la base B e la cima C della statua misurano rispettivamente  $20,75^{\circ}$  e  $28,30^{\circ}$ . Si determini l'altezza  $h$ .

$$166,2 \text{ m}$$

6. In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 m . Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a  $18^{\circ}$  e  $24^{\circ}$ . Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

$$91,43 \text{ m}$$

7. Due osservatori si trovano ai lati opposti di un grattacielo, a livello del suolo. La cima dell'edificio dista 1600 m dal primo osservatore, che la vede con un angolo di elevazione di  $15^{\circ}$ . Sapendo che il secondo individuo si trova a 650 m dal tetto del grattacielo, si determini la distanza tra i due osservatori.

*2046,5 m*

8. Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 m. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di  $30^\circ$ . Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a  $20^\circ$ , con che velocità si stanno spostando gli uccelli ?

*264 m / minuto*

9. Un aeroplano vola verso nord nell'area ferma con una velocità di 360 km/h . All'improvviso l'aeroplano incontra un vento trasversale da ovest, la cui velocità è 100 km/h. Se il pilota non agisce sui comandi dell'aeroplano, quale sarà la sua nuova direzione e la sua nuova velocità rispetto al suolo ?

*$15^\circ 31' NE$ ; 373,63 km/h*

10. Una fotografa naturalista individua un uccello raro appollaiato su un albero. L'angolo di elevazione è di  $14^\circ$  e il telemetro dell'apparecchio fotografico indica che tra l'uccello e l'obiettivo vi è una distanza di 103 m. Ella avanza lentamente, sino ad arrivare in un punto per cui l'angolo di elevazione è di  $20^\circ$ . A che distanza si trova ora l'uccello dall'obiettivo della fotografa?

*70,56 m*

11. Due caccia militari partono contemporaneamente dalla medesima base aerea seguendo due rotte rettilinee che formano tra loro un angolo di  $135^\circ 39'$ . Qual è la distanza tra gli aerei dopo che ciascuno dei due ha percorso 402 km ?

*744,5 km*

12. Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di  $4^\circ$ ; 20 minuti più tardi l'angolo di elevazione misura  $9^\circ$ . Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero ?

*15,81 minuti*

13. Un radioamatore trasmette illegalmente da un punto C. Due poliziotti tengono le trasmissioni sotto sorveglianza, disponendosi in due punti A e B distanti 3,8 km tra loro. Da queste due stazioni di sorveglianza, utilizzando un radiogoniometro, essi determinano le seguenti misure angolari:  $C\hat{A}B = 40,1^\circ$ ,  $C\hat{B}A = 31,8^\circ$ . A che distanza dal punto A si trova il radioamatore ?

*2,11 km*

14. Alcuni ingegneri si propongono di costruire una galleria rettilinea che colleghi il paese A, situato su un versante di una collina, col paese B, che si trova sul versante opposto.

Da una terza località C i progettisti misurano le distanze  $CA = 837 \text{ m}$ ,  $CB = 1164 \text{ m}$  e l'angolo  $\hat{A}CB$  la cui ampiezza è  $44,5^\circ$ . Si calcoli quale sarà la lunghezza della galleria.

*815,9 m*

15. Un aviogetto di linea vola ad un'altezza di 10 km. Il pilota si sta preparando all'atterraggio, che deve avvenire lungo un corridoio rettilineo che forma con l'orizzontale un angolo di  $5^\circ$ . Se la discesa dura 12 minuti, quale sarà la velocità media dell'aereo durante quest'ultima fase del volo ?

*573,69 km/h*

16. Un aereo civile viaggia in volo orizzontale con velocità costante lungo una rotta che lo porta a sorvolare Venezia. Da uno squarcio nelle nuvole il comandante vede le luci della città con un angolo di depressione di  $7^\circ$ . Tre minuti più tardi ricompaiono nuovamente le luci, questa volta però l'angolo di depressione misurato è di  $13^\circ$ . Quanti minuti saranno ancora necessari perché l'aereo venga a trovarsi esattamente sopra la città?

*3,41 minuti*

17. Dei biologi studiano la migrazione degli uccelli, seguendo uno stormo con un aereo leggero. Gli uccelli volano ad un'altezza costante di 360 m, mentre l'aereo si mantiene stabilmente ad una quota di 510 m. Inoltre, per non disturbare i volatili, il velivolo deve rimanere ad almeno 180 m di distanza dallo stormo. Di conseguenza i biologi devono continuamente controllare l'angolo di depressione dello stormo visto dall'aereo. Si calcoli il valore massimo ammissibile dell'angolo di depressione.

*$56^\circ 26'$*

Per risolvere più facilmente alcuni dei quesiti di cui sopra, e comunque opportuno richiamare alcune definizioni.

Viene chiamato **angolo di elevazione** l'angolo acuto che il raggio visivo forma con una retta orizzontale, quando un osservatore guarda un oggetto posto al di sopra del piano orizzontale. Analogamente, l'angolo acuto che il raggio visivo forma con una retta orizzontale, quando si guarda un oggetto posto al di sotto del piano orizzontale, è detto **angolo di depressione**.

In molte applicazioni della trigonometria, specialmente in topografia e navigazione, si definisce **direzione** o **rilevamento** di un punto Q visto da un altro punto P l'angolo positivo che la retta congiungente i punti P e Q forma con la retta che ha direzione nord-sud e passa per il punto P. Si deve inoltre specificare se l'angolo viene misurato in direzione est o ovest rispetto al nord o al sud: NE, NO, SO, SE.

\* \* \*

E' ulteriormente possibile formulare dei quesiti sulle applicazioni della trigonometria all'ottica geometrica, in particolare alla riflessione della luce su uno specchio piano. Sarà bene ricordare che l'immagine di un punto luminoso S, che si trovi dinanzi a uno specchio piano, è il punto S' simmetrico di S rispetto allo specchio: uno specchio piano da un'**immagine simmetrica** dell'oggetto rispetto al piano riflettente dello specchio.

\* \* \*

Avendo dato notizia della “possibilità” di cui sopra, dal sapore vagamente “profetico”, ritengo conclusa la mia orazione “Pro Trigonometria”: spero proprio che a nessuno venga più l’idea di eliminarla dagli esami di Stato.