Tema: L’induzione matematica.

di Antonino Giambò

1. Un modo per dimostrare proprietà dei numeri naturali è basato sul *principio d’induzione*. In questo articolo mi propongo ovviamente di enunciarlo e di mostrarne alcune applicazioni a situazioni sia semplici sia più complicate a beneficio degli studenti delle scuole secondarie di 2° grado. A mio modesto avviso è infatti un argomento troppo importante perché lo si possa ignorare. E questo anche se “l’utilizzazione del principio d’induzione” non rientra fra gli obiettivi elencati nel quadro di riferimento per la redazione e lo svolgimento della seconda prova scritta dell’esame di Stato nei licei scientifici.

Non prima però di aver dato qualche indicazione di carattere storico. Concluderò l’articolo con una breve riflessione su “dimostrazione per induzione” e “metodo induttivo”.

NOTA STORICA. Il **principio d’induzione** fu sistematicamente utilizzato dal matematico piemontese **Giuseppe Peano** (1858-1932) nella costruzione assiomatica dei numeri naturali (*Artithmetices principia nova methodo exposita*, 1889) e ribadito nel *Formulario mathematico* (cap. I. Logica matematica, ultima edizione, 1908). E questo fatto a volte induce a pensare che a lui ne vada attribuita la paternità. Ma è un errore, anche se la formulazione del principio fornita da Peano è quella che al giorno d’oggi tutti adoperano.

In realtà, il matematico e filosofo francese **Blaise Pascal** (1623-1662) enunciò il “principio” e lo utilizzò fin dal 1654, anche se l’opera che lo contiene – *Traité du triangle arithmétique* – fu pubblicata postuma nel 1665. Il che induce a ritenere Pascal come il primo studioso che si sia servito esplicitamente di tale principio.

Ma anche questo è falso. In effetti, del “principio” si erano già serviti sia lo scienziato e umanista messinese **Francesco Maurolico** (1494-1575) nell’opera *Arithmeticorum libri duo* (1575), sia il matematico francese **Claude-Gaspard Bachet** [(1)] (1581-1638) nei suoi lavori di aritmetica. Addirittura figurano dimostrazioni per induzione matematica in un’opera dal titolo *Maaseh Hoshev* (*Arte del calcolo*), pubblicata nel 1321 dal rabbino **Lavi ben Gershon** (1288-1344), noto come **Gersonide**, filosofo, matematico e astronomo francese.

Per concludere con questa breve nota, l’unica cosa certa riguardo alla paternità del principio è che gli storici ignorano a chi attribuirla esattamente.

2. Questo è l’enunciato del **PRINCIPIO D’INDUZIONE** in una formulazione simile a quella di Peano:

SE zero gode di una proprietà e
SE ogni volta che un numero gode di quella proprietà lo stesso vale per il successivo del numero
ALLORA tutti i numeri godono di quella proprietà.

S’intende che i numeri di cui si parla sono i numeri naturali.

Possiamo esprimere il principio in forma simbolica. Ricordato che $\mathbb{N}$ rappresenta l’insieme dei numeri naturali, indichiamo con **n*** il successivo del generico numero naturale **n**. Ebbene, considerata una proprietà P e indicato con P(x) il fatto che x goda della proprietà P, il principio d’induzione, in forma simbolica, è il seguente:

$$\mathbf{P:\ \{P(0) \land (\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \rightarrow P(n^*))\} \rightarrow (\forall x \in \mathbb{N},\ P(x))}$$

Si può costatare che l’applicazione del principio d’induzione richiede due soli passaggi, ma fondamentali.

Precisamente, per concludere, in base al **principio d’induzione**, che una determinata proprietà P vale per ogni numero naturale, bisogna dimostrare che:

1) $P(0)$, cioè P vale per 0. Questo fatto si chiama ***base dell’induzione***;
2) $P(n) \rightarrow P(n+1)$, cioè se P vale per un generico numero naturale n allora vale anche per $n+1$. Questo fatto si chiama ***passo induttivo***.

---

[1] Detto per la cronaca, Bachet tradusse dal greco in latino i sei libri, allora conosciuti, dell’*Aritmetica* di Diofanto. Una copia di questa traduzione finì nelle mani di Fermat, il quale scriveva nei margini delle pagine le sue celebri annotazioni, compresa quella riguardante l’ultimo teorema.

Quando questi due fatti saranno stati provati si potrà concludere che la proprietà P vale per ogni numero naturale.

A volte la base dell'induzione è P(1), cioè P vale per 1, o anche P(2) o più in generale P(k). In questo caso per il passo induttivo bisogna supporre $n>k$ e la proprietà P vale ovviamente per tutti i numeri naturali non minori di k. In altri termini, P(n) per $n \geq k$.

Alcune brevi riflessioni allo scopo di prevenire eventuali obiezioni, ovviamente da parte degli studenti.

• Prima obiezione: *Se verifico che P vale per "molti" n, non posso concludere che vale per "ogni" n, senza tante storie?*

Questa obiezione è piuttosto debole, ingenua perfino: "molti" o anche "moltissimi" o addirittura "infiniti" non vuol dire "tutti".

A titolo di semplice esempio, consideriamo il seguente polinomio in n:

$$A(n) = n^2-17n+293.$$

Se attribuiamo ad n i valori interi da 0 a 20, si può verificare facilmente che si ottiene sempre un numero primo. Se da ciò si conclude che A(n) è un numero primo per ogni n, si dice una sciocchezza. Infatti:

$$A(21) = 21^2-17\times 21 + 293 = 377 = 13\times 29.$$

Se qualcuno avesse pensato erroneamente di seguire questo procedimento si consoli: ha commesso un errore simile anche il grande Pierre de Fermat (1601-1665), il quale congetturò che ogni numero avente la forma $2^{2^n}+1$, dove n è un qualsiasi numero naturale, è un numero primo.

In realtà, è così per n=0,1,2,3,4, ma per n=5 si ottiene il numero 4.294.967.297 che si fattorizza in $641\times 6.700.417$.

Questo fu trovato, con "carta e penna", per la prima volta nel 1732 dal grande Leonhard Euler (1707-1783).

C'è di più. A tutt'oggi, anche utilizzando potenti strumenti di calcolo automatico, non sono stati trovati altri numeri primi aventi la forma $f_n=2^{2^n}+1$ oltre ai 5 già indicati, vale a dire:

$$f_0 = 3,\ f_1 = 5,\ f_2 = 17,\ f_3 = 257,\ f_4 = 65.537;$$

tanto che si congettura che non ce ne siano altri, ma senza poterlo dimostrare. Almeno fino ad oggi.

I numeri f_n sono denominati "numeri di Fermat" e, quando sono primi, "numeri primi di Fermat".

In realtà, esistono proposizioni matematiche che sono verificate in moltissimi casi, addirittura in tutti i casi in cui è possibile verificarle. Ma questo non basta per concludere che sono vere, giacché non è stato possibile, almeno fino ad oggi, fornire una dimostrazione della loro validità, neppure utilizzando il principio d'induzione. I matematici le chiamano *questioni aperte*. Ne enuncio alcune, invitando chi ne fosse interessato, se gli fa piacere, a visitare il sito web:

www.matematicagratuitaperscuolesuperiori.it

In parentesi sono indicati il numero dell'unità del cosiddetto "testo base", il paragrafo e il sotto-paragrafo:

- *congettura di Polignac* (cfr.: U54 – Insiemi numerici e infinito, N° 54.2.4);
- *esistono infiniti numeri perfetti*;
- *esistono infinite coppie di numeri amici;*
- *esistono infinite coppie di numeri primi gemelli;*
- *congettura di Goldback.*

(Le ultime 4 proposizioni sono presenti tutte in U87 – Il metodo assiomatico, N° 87.3.6).

• Seconda obiezione: *Se si suppone che la proprietà P vale per un generico numero n, non posso concludere, senza tanti fronzoli, che vale per ogni n? Che senso ha, allora, pensare di dimostrare che vale per n+1?*

Ecco, questa obiezione è più interessante e la risposta potrebbe non essere convincente. Provo a darla lo stesso. "Supporre" che la proprietà P valga per un generico n non significa "avere la garanzia" che P valga effettivamente per ogni n. È solo un'ipotesi.

Questa garanzia c'è, al contrario, quando si è verificato che P vale per n=0 e, ammesso che P valga per n, si è realmente provato che vale anche per n+1. Come recita, per l'appunto, il principio d'induzione.

In realtà, se la proprietà vale per n=0, allora per il passo induttivo vale per n=1 e quindi per n=2, e poi per n=3, e così via per ogni n.

- Terza obiezione: *Non basta la dimostrazione del solo passo induttivo per concludere che una data proprietà è vera? Perché serve anche verificare la base dell'induzione?*

Questa è un'obiezione intelligente. Per smentirla basta un contro-esempio.

Dimostriamo allora che, se bastasse il passo induttivo e non fosse necessaria la base dell'induzione, si cadrebbe nell'assurdo che sia $2^n<0$.

In effetti, si dimostra facilmente il passo induttivo, vale a dire che se la proprietà è vera per n (cioè $2^n<0$), essa continua ad esser vera anche per n+1 (infatti: $2^{n+1}=2^n \cdot 2<0$). E perciò si dovrebbe concludere che è $2^n<0$. Conclusione ovviamente assurda.

In realtà, se si considera la base dell'induzione ($2^0<0$), si costata che è falsa e quindi non possiamo concludere che la proprietà suddetta sia vera in base al principio d'induzione.

Insomma, lo ribadisco, l'applicazione del principio d'induzione richiede che siano chiamati in causa e verificati entrambi i fatti suddetti: base dell'induzione e passo induttivo.

3. Ci soffermiamo, adesso, anche a maggior chiarimento di quanto detto fin qui, su alcune semplici dimostrazioni basate proprio sul principio d'induzione. Senza, con ciò, voler sostenere che non esistano altre dimostrazioni, che in effetti ci sono, ma qui non ci interessano.

♦ PROPRIETÀ 1. La somma dei primi n numeri naturali, a partire da 1, vale:

$$\frac{n\,(n+1)}{2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Qui la base dell'induzione è 1 e la proprietà, che in simboli è scritta in questo modo:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}.$$

è certamente vera per n=1. Ci proponiamo di far vedere che se è vera per n allora è vera anche per n+1.

Di fatto si ha:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{n\,(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

In conclusione, per il principio d'induzione, la formula vale per ogni naturale n>0.

♦ PROPRIETÀ 2. Il numero delle diagonali di un poligono di n lati è:

$$\frac{n\,(n-3)}{2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Qui la base dell'induzione è 3 e la proprietà è vera per n=3: il triangolo, infatti, non ha diagonali. Supponiamo che essa sia vera per n. Bisogna far vedere che è ancora vera per n+1. Per questo ci riferiamo alla figura sottostante (figura 1), nella quale AB è un lato del poligono di n lati (nel caso specifico n=5), che sparisce quando si passa al poligono di n+1 lati ed è sostituito dai lati AC e CB. Ebbene, il poligono di n+1 lati ha, in aggiunta alle diagonali del poligono di n lati (in rosso in figura), da cui è ottenuto, la diagonale AB (tratteggiata in figura) e le diagonali (in blu in figura) che si ottengono congiungendo il vertice C con gli n–2 vertici del poligono di n+1 lati (e n+1 vertici), che siano diversi dai vertici C, A, B; pertanto le diagonali del poligono di n+1 lati sono in numero di:

$$\frac{n\,(n-3)}{2}+(n-2)+1=\frac{n\,(n-3)+2\,(n-1)}{2}=\frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

In conclusione, per il principio d'induzione, la proprietà vale per ogni naturale n≥3.

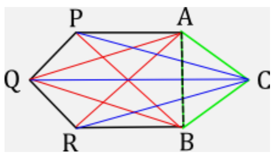

figura 1

♦ Proprietà 3. Se un insieme è formato da n elementi, l'insieme delle sue parti è formato da 2^n elementi.

Dimostrazione. La proprietà è vera per $n=0$: l'insieme delle parti dell'insieme vuoto $\varnothing$ è, infatti, l'insieme $\{\varnothing\}$, che evidentemente ha un solo elemento. Ammettiamo ora che la proprietà sia vera per n e facciamo vedere che continua ad essere per $n+1$. Per questo basta costatare che, nel passaggio dall'insieme di n elementi a quello di $n+1$ elementi, l'insieme delle parti del nuovo insieme comprende, come elementi, tutti i sottoinsiemi dell'insieme di n elementi, vale a dire 2^n elementi, e in più i sottoinsiemi che si ottengono da questi inserendo in ognuno di essi l'(n+1)-esimo l'elemento nuovo e questi nuovi sottoinsiemi sono evidentemente ancora in numero di 2^n. L'insieme delle parti dell'insieme di $n+1$ elementi è dunque formato da $2^n+2^n=2^{n+1}$ sottoinsiemi.

In conclusione, per il principio d'induzione, la proprietà vale per ogni naturale n.

4. Dalla disamina delle precedenti proprietà si desume un limite rimarchevole del principio d'induzione: la proprietà (o la formula) che si deve dimostrare deve essere conosciuta preventivamente o quantomeno deve essere congetturata, ipotizzata. Il principio dunque non consente di scoprire proprietà, non ha cioè valore euristico ma solo dimostrativo.

Sorge allora un dubbio: **come si fa ad ipotizzare una certa formula o una certa proprietà?**

Ebbene, il modo più efficace è di fare alcuni tentativi che possano aiutare a congetturarla.

A chiarimento di ciò esplicitiamo il procedimento che porta a congetturare una formula che fornisca il numero di elementi dell'insieme delle parti P(A) di un insieme A di n elementi:

- se $A=\varnothing$ allora $P(A)=\{\varnothing\}$;
- se $A=\{a\}$ allora $P(A)=\{\varnothing,\{a\}\}$;
- se $A=\{a,b\}$ allora $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$;
- se $A=\{a,b,c\}$ allora $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

Dunque, ragionando sui risultati ottenuti:

- se A contiene 0 elementi, P(A) ne contiene 1,
- se A contiene 1 elemento, P(A) ne contiene 2,
- se A contiene 2 elementi, P(A) ne contiene 4,
- se A contiene 3 elementi, P(A) ne contiene 8.

Ora, non ci vuol molto a capire che i numeri 1, 2, 4, 8 si possono mettere nella forma $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$. Sembra che ci sia una regolarità. Possiamo allora estendere il ragionamento e ipotizzare che se A contiene n elementi, P(A) ne contiene 2^n.

A questo punto si prova a dimostrare la congettura utilizzando il principio d'induzione. Se la dimostrazione va a buon fine la congettura non è più tale e diventa una proprietà.

In realtà, le cose non sempre sono così semplici, ma questa è l'idea.

5. Concludiamo con alcune dimostrazioni meno semplici delle precedenti, ma particolarmente interessanti soprattutto per le modalità con cui si sviluppano che, comunque, utilizzano il principio d'induzione.

Esercizio 1. Si considerino le due funzioni della variabile naturale n: n^2 e $2n+1$. Si può facilmente controllare che per $0\le n\le 2$ risulta: $n^2>2n+1$.

Invece, per $n\ge 3$ si ha: $n^2>2n+1$. Dimostrare questo fatto per induzione.

Risoluzione. Intanto è evidente che la relazione è vera per $n=3$. Ammettiamo che sia vera per n e dimostriamo che è ancora vera per $n+1$, vale a dire:

ammesso che sia: $n^2>2n+1$ bisogna dimostrare che è: $(n+1)^2>2(n+1)+1$.

Ora si ha:

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 > (2n+1)+2n+1 = 2n+2n+2.$$

Tenendo presente che stiamo ragionando per $n\ge 3$, risulta evidentemente $2n\ge 6$ e quindi $2n+2\ge 8$. Pertanto:

$$2n+2n+2 \ge 2n+8 > 2(n+1)+1.$$

In definitiva: $(n+1)^2>2(n+1)+1$. Che è ciò che volevamo dimostrare.

Per questo motivo, in virtù del principio d'induzione, possiamo concludere che per ogni naturale $n \geq 3$ risulta: $n^2 > 2n+1$.

ESERCIZIO 2. Dimostrare che il numero $5^{n+2}+7^{2n+1}$ è divisibile per 4, qualunque sia il naturale n.

DIMOSTRAZIONE. Per $n=0$ il numero diventa uguale a 32, che è divisibile per 4; quindi la proprietà è vera per $n=0$. Ammettiamo che sia vera per n e facciamo vedere che continua ad essere vera per $n+1$.

Si tratta di far vedere sostanzialmente che il numero $5^{(n+1)+2}+7^{2(n+1)+1}$ è divisibile per 4 sapendo che lo è il numero $5^{n+2}+7^{2n+1}$.

Ora, il fatto che quest'ultimo numero sia divisibile per 4 implica l'esistenza di un intero m, non nullo, tale che: $5^{n+2}+7^{2n+1}=4m$, da cui segue: $7^{2n+1}=4m-5^{n+2}$. Si ha di conseguenza:

$$5^{(n+1)+2} + 7^{2(n+1)+1} = 5^{n+3} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} = 5^{n+3} + 49\,(4m - 5^{n+2}) =$$
$$= 5^{n+2}\,(5-49) + 49 \cdot 4m = 4\,(49m - 11 \cdot 5^{n+2}).$$

Osservato che il numero dentro le parentesi, nell'ultima espressione, è un intero, dobbiamo concludere che il numero $5^{(n+1)+2}+7^{2(n+1)+1}$ è divisibile per 4.

In conclusione, per il principio d'induzione, la proprietà vale per ogni naturale n.

ESERCIZIO 3. Dimostrare per induzione che risulta:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

Questa formula esprime il cosiddetto ***teorema di Nicomaco***, dal nome del matematico al quale è attribuito: Nicomaco di Gerasa [(2)] (I-II sec. d.C.).

Ci possiamo chiedere – al di là della dimostrazione, che sicuramente Nicomaco non ha condotto utilizzando il principio d'induzione – come egli abbia fatto a scoprire questo teorema, che non è propriamente intuitivo. In realtà, non lo sappiamo, ma possiamo ipotizzare che lo abbia fatto ragionando come abbiamo visto sopra a proposito del numero delle parti di un insieme. Vale a dire in questo modo:

- $1^3+2^3=9$ cioè 3^2 e $3=1+2$, per cui: $1^3+2^3=(1+2)^2$;
- $1^3+2^3+3^3=36$ cioè 6^2 e $6=1+2+3$, per cui: $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$;
- $1^3+2^3+3^3+4^3=100$ cioè 10^2 e $10=1+2+3+4$, $1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$;

e così via, passando da casi particolari al caso generale, che però va dimostrato se si vuole che sia un teorema, altrimenti rimane una pura e semplice congettura.

Vediamola allora una dimostrazione basata sul principio d'induzione. Non prima di aver precisato che di dimostrazioni ne esistono di vario genere, ottenute anche senza far ricorso al principio d'induzione.
Esistono pure verifiche sperimentali ottenute attraverso la costruzione di modelli geometrici.

DIMOSTRAZIONE. La relazione è vera per $n=1$, cosa verificabile facilmente. Ammesso che sia vera per n, bisogna dimostrare che è vera per $n+1$. Vale a dire:

ammesso che sia $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$,

bisogna far vedere che è: $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=[1+2+3+\ldots+n+(n+1)]^2$.

Ora, ricordando pure che $1+2+3+\ldots+n=\frac{n\,(n+1)}{2}$, si ha:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) =$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

[2] Nicomaco di Gerasa (I-II sec. d.C.) è stato un filosofo e matematico ellenico, autore di una *Introduzione all'aritmetica*, considerato il testo di aritmetica più importante dell'antichità greca. Quest'opera sarebbe stata un riferimento fondamentale per i manuali di Manlio Severino Boezio (ca. 480-524), che per oltre 8 secoli, pur essendo piuttosto poveri di contenuto, avrebbero costituito in Occidente la massima autorità in campo matematico.

Si può costatare che la quantità in parentesi nell'ultima espressione è esattamente uguale alla somma dei primi n+1 numeri naturali a partire da 1, ragione per cui è dimostrato ciò che si voleva. Di conseguenza è anche dimostrato il teorema di Nicomaco.

6. A volte si tende a confondere l'induzione matematica con il metodo induttivo, che sono invece due cose completamente diverse.

Il ragionamento basato sul principio d'induzione (detto anche ***dimostrazione per induzione***) è pur sempre un ragionamento di tipo deduttivo, come hanno mostrato ampiamente gli esempi forniti.

Esso è cosa assolutamente diversa dal ***metodo induttivo***, basato sulla cosiddetta *induzione empirica*, secondo la quale da una serie di osservazioni particolari si procede all'enunciazione di una regola generale, che però rimane a livello di ipotesi non dimostrata, di congettura, e va bene fintantoché non viene soppiantata da un'altra ipotesi più convincente. L'induzione empirica è tipica delle scienze naturali, della fisica, della medicina, eccetera. Anche l'induzione statistica si può considerare una forma particolare di induzione empirica.

Un paio di considerazioni a proposito della nascita del metodo induttivo.

- Il filosofo neoplatonico Proclo di Licia (V sec. d.C.), una delle fonti più accreditate riguardo alla matematica pre-euclidea, attribuisce a Talete di Mileto (VII-VI sec. a.C.) la scoperta di alcune proprietà geometriche, sostenendo addirittura che ne abbia dimostrato qualcuna. Scrive infatti Proclo: *Che il cerchio sia dimezzato dal diametro si dice che per primo l'abbia dimostrato Talete* [3].

Ora, che Talete abbia potuto dimostrare questa o altre proprietà, nel senso che oggi attribuiamo a questo fatto, cioè che le abbia dedotte con ragionamento da altre proposizioni (ammesse o dimostrate), appare ai critici cosa del tutto inverosimile, dal momento che erano ancora pochine e piuttosto elementari le proprietà geometriche di cui egli aveva conoscenza perché potesse avvertire una qualche concatenazione logica fra esse. È più probabile che Talete abbia intuito quelle proprietà o addirittura le abbia anche verificate sperimentalmente, e convinto della loro validità generale per la frequenza con cui si presentavano in tali verifiche, ne abbia fatto delle affermazioni universali.

Insomma Talete non avrebbe fatto altro che ricorrere al metodo induttivo, consapevolmente o no

- Il grande filosofo greco Aristotele (384-322 a.C.), in realtà, attribuisce a Socrate (V sec. a.C.) la paternità del metodo induttivo [4], ma sono molti coloro che non condividono questa attribuzione e fra questi il filosofo lombardo Giovanni Reale (1931-2014). Aristotele, comunque, nelle sue opere ne parla diffusamente. In particolare nei *Topici* ne fornisce addirittura una definizione: *procedimento che dai particolari porta all'universale*.

Il metodo ha avuto nel corso dei secoli, e particolarmente dei secoli XIX e XX, sia assertori (per esempio: il filosofo e fisico tedesco Moritz Schlick, 1882-1936, fondatore del *Circolo di Vienna*, e, in Italia, il perugino Giuseppe Tassinari, 1891-1936, docente universitario di economia e politica agraria), sia critici (per esempio: Bertrand Russell, 1872-1970, e Karl Popper, 1902-1994).

Esso è alla base del *metodo sperimentale* (o *metodo scientifico*), il cui fondatore è ritenuto Galileo Galilei (1564-1642), tanto che questo metodo è denominato anche *metodo galileiano*.

> *La matematica esposta in forma rigorosa si presenta come una scienza sistematica deduttiva, ma, nel periodo della sua formazione, fu essenzialmente una scienza sperimentale induttiva.*
>
> [George Polya [5], *Come risolvere i problemi di matematica*, Milano, Feltrinelli, 1983, pag. 124]

[3] Cfr.: Attilio Frajese, Attraverso la storia della matematica, Firenze, Le Monnier, 1971, pagg. 36-37.
[4] Il metodo deduttivo, vale a dire la dimostrazione, è ritenuto universalmente una scoperta dei Pitagorici (VI sec.a.C.).
[5] George Polya, matematico ungherese, 1887-1985.