**Tema: Breve storia dell'Algebra**

di Antonino Giambò

**1.** Gli storici della Matematica considerano fondatore dell'Algebra il matematico alessandrino **Diofanto** (1) (II-III sec. d.C.) poiché nella sua opera principale, dal titolo *Arithmetica*, usò per primo una sorta di linguaggio nel quale figurano abbreviazioni per indicare le incognite delle equazioni e alcune operazioni. Questo tipo di linguaggio che sarà denominato *Algebra sincopata*. È una via di mezzo fra un'Algebra fatta solo di parole e di frasi della lingua corrente, senza abbreviazioni né simboli (*Algebra retorica*) e un'Algebra che utilizza lettere per rappresentare quantità note e incognite, come la nostra (*Algebra simbolica*).

In realtà, già moltissimo tempo prima di Diofanto gli Egizi e i Babilonesi risolvevano equazioni, come testimoniano i documenti di cui disponiamo: i papiri riguardo alle conoscenze egizie, le tavolette di argilla riguardo a quelle babilonesi. Si tratta di reperti che descrivono conoscenze che risalgono al 2.000 a.C.

- Gli Egizi risolvevano equazioni in un'incognita che oggi scriveremmo nel seguente modo:

$$x + a\,x = b\,,\quad x + a\,x + b\,x = c\,.$$

Essi seguivano a volte un metodo di risoluzione molto simile al nostro, a volte un metodo del tutto diverso, denominato "*metodo di falsa posizione*".

Descrivo questi due metodi rifacendomi ad altrettanti esempi [4, pag. 90].

- Il primo esempio, esposto nel nostro linguaggio, è tratto dal problema n. 19 del Papiro di Mosca (2):

«La quantità 1+1/2 di un mucchio (3) aumentata di 4 dà 10. Quant'è il mucchio?»

Gli Egizi indicano il seguente procedimento risolutivo (tradotto liberamente):

«Calcola l'eccesso di 10 sopra 4, che è 6; somma 1 con 1/2 e trovi 3/2. I 2/3 di 6 è 4. Il risultato è 4».

Si tratta di un procedimento del tutto simile al nostro:

Indicato con x il "mucchio", risulta $\left(1+\frac{1}{2}\right)x+4=10$ e pertanto $\frac{3}{2}x=10-4$ ossia $\frac{3}{2}x=6$ da cui segue $x=\frac{2}{3}\cdot 6=4$.

- Per descrivere il *metodo di falsa posizione* consideriamo il problema n. 25 del Papiro di Rhind (4):

«Trovare un numero che, sommato con la sua metà, dia 16».

Noi risolveremmo così: Indicato con x il numero, deve essere $x+\frac{1}{2}x=16$ e pertanto $\frac{3}{2}x=16$, ossia $x=\frac{32}{3}$.

Invece gli Egizi procedevano in questa maniera: «Se 2 fosse il numero cercato sarebbe $2+\frac{1}{2}\cdot 2=3$. Si cerca allora per quale numero occorre moltiplicare 3 per avere 16; per lo stesso numero si deve moltiplicare 2 per avere il numero cercato. Allora si divide 16 per 3 e si trova $\frac{16}{3}$. Dunque il numero cercato è $2\cdot\frac{16}{3}$ cioè $\frac{32}{3}$ ».

- In questo campo i Babilonesi erano più evoluti degli Egizi. Infatti, pur mancando di ogni simbolismo algebrico, erano in grado di risolvere equazioni non solo di 1° grado, ma anche di 2° grado e addirittura risolvevano particolari equazioni di 3° grado. La loro era un'Algebra assolutamente retorica.

Le equazioni di 2° grado che risolvevano i Babilonesi sono dei seguenti tipi:

$$(1)\ \ x^2 + a\,x = b\,,\quad (2)\ \ x^2 - a\,x = b\,,\quad (3)\ \ x^2 + b = a\,x\,,$$

dove a, b sono numeri positivi.

Riguardo alle equazioni dei tipi (1) e (2) sono indicati procedimenti risolutivi che possiamo riassumere nelle seguenti corrispondenti formule:

---

[1] Una chiosa sulla pronuncia: per alcuni è Diofànto, alla latina; per altri Diòfanto, alla greca. Siccome Diofanto scrive in greco ed è un matematico greco (Διόφαντος, *Diófantos*), mi sembra più corretta la seconda pronuncia.

[2] È chiamato così perché è conservato a Mosca nel Museo delle Belle Arti. È denominato anche Papiro di Goleniscev, in onore dell'egittologo russo Vladimir Goleniscev (1856-1947), che lo acquistò in Egitto nel 1893 e lo portò a Mosca. Contiene 25 problemi a contenuto matematico.

[3] Il mucchio, che gli Egizi indicavano in verità con il termine "aha" e per il quale avevano un simbolo specifico, è sostanzialmente l'incognita.

[4] È così chiamato perché acquistato nel 1858 dallo scozzese Alexander Henry Rhind (1833-1863). È denominato anche Papiro di Ahmes, dal nome dello scriba che lo trasse da un papiro precedente, intorno al 1650 a.C.. È conservato a Londra nel British Museum. Contiene 87 problemi a contenuto matematico.

$$(1') \quad x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}, \qquad (2') \quad x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}.$$

Invece nella risoluzione delle equazioni del tipo (3), il procedimento indica una delle due soluzioni riassumibili nella formula seguente:

$$(3') \quad x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Affinché risulti più chiaro quale fosse il procedimento seguito dai Babilonesi, lo ricostruiamo, ancorché in linguaggio moderno, con riferimento ad un esempio, tratto da una tavoletta, in cui si chiede di:

«*trovare il lato di un quadrato sapendo che l'area diminuita del lato è 870*» (5) [1, pag. 37].

Noi risolviamo così: detto x il lato, si ha l'equazione $x^2 - x = 870$, da cui, prendendo la sola radice positiva, segue:

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4\cdot 870}}{2}, \text{ che è come dire: } x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 870} + \frac{1}{2}, \text{ ossia: } x = 30.$$

Ebbene, la nostra formula non è altro che la sintesi dei passaggi numerici effettuati dai Babilonesi e da loro esposti solo a parole (6): prendi la metà di 1, che è 1/2, e moltiplica 1/2 per 1/2, che è 1/4; aggiungi 1/4 a 870 e ottieni 3481/4; questo è il quadrato di 59/2. Aggiungi ora 1/2 a 59/2 e trovi 30, il lato del quadrato.

Si capisce facilmente che tutte e tre le formule – che, lo ripeto, i Babilonesi non avevano – sono casi particolari della nostra formula risolvente di un'equazione di 2° grado.

Sulla logica che avrebbero seguito i Babilonesi per giungere ai procedimenti che risolvono classi di equazioni, ci sono due posizioni: una, datata 1935, dovuta al matematico austriaco Otto Neugebauer (1899-1990), il quale giudica che i ragionamenti dei Babilonesi fossero di tipo esclusivamente algebrico, l'altra, più recente, formulata nel 1999 dal matematico danese Jens Hoyrup (n. 1943). Questi, riprendendo consapevolmente o no un'idea dell'italiano Ettore Bortolotti (1866-1947), ritiene che la logica di base sia da ricercarsi nella Geometria. In entrambi i casi il procedimento risolutivo delle equazioni di 2° grado poggia sulla costruzione di un quadrato incognito: una costruzione algebrica secondo Neugebauer, una costruzione geometrica secondo Hoyrup. [6, pag. 71 e segg.; 5, pag. 132 e segg.]

**2.** L'Algebra dei Babilonesi, anche se costruita su una base geometrica, si presentava però ai Greci, in particolare ai Pitagorici, come una serie di passaggi meccanici, in cui il supporto geometrico non compariva più. È verosimile che i Pitagorici la rifiutassero. Certamente la loro Algebra, che, secondo il parere dei più, forma gran parte del II libro degli *Elementi* di Euclide, è un'Algebra basata esclusivamente sulla Geometria. Il matematico danese Hieronymus Georg Zeuthen (1839-1920) definisce questo libro il libro dell'*Algebra geometrica*. In effetti, le prime 10 proposizioni del libro equivalgono ad altrettante formule algebriche.

Un paio di esempi per capire meglio [2, pag. 159 e segg.].

- La proposizione 1 recita (figura 1): «Se si considerano due segmenti e si divide uno di essi in quante parti si voglia, il rettangolo compreso dai due segmenti è uguale alla somma dei rettangoli compresi dal segmento indiviso e da ciascuna delle parti dell'altro.» Nel nostro linguaggio simbolico:

$$(a + b + c)\, m = a\, m + b\, m + c\, m.$$

- La proposizione 4 fornisce quello che oggi denominiamo sviluppo del quadrato di un binomio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\, a\, b + b^2.$$

5 I Babilonesi usano un linguaggio che sembra non preoccuparsi di rispettare le condizioni di omogeneità delle grandezze considerate. Infatti sommano lunghezze con aree, aree con volumi, lunghezze con volumi. Qualche studioso (Ettore Bortolotti, 1936) giudica tuttavia che le condizioni di omogeneità fossero sottintese. Per esempio, nella somma di un segmento con un'area, Bortolotti ritiene che al posto del segmento debba intendersi un rettangolo avente per dimensioni il segmento considerato e un segmento lungo 1, per cui il numero che esprime la sua area è esattamente quello stesso che esprime la lunghezza del segmento. Analogamente negli altri casi.

6 Bisogna aggiungere che i Babilonesi scrivono i numeri nel loro sistema sessagesimale e non nel sistema decimale.

Essa infatti afferma che (figura 2): «Se si divide a caso un segmento, il quadrato di esso è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio rettangolo compreso dalle parti stesse».

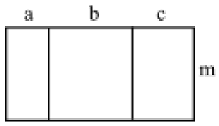

figura 1

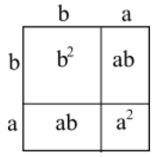

figura 2

Due di quelle 10 proposizioni (la 5 e la 6) hanno attinenza con problemi, detti ***problemi di applicazione delle aree***, attribuiti anch'essi ai Pitagorici, i quali affrontano le questioni di applicare ad un segmento AB (cioè costruire sul segmento AB) un rettangolo ABCD di area nota in modo che la base AB del rettangolo:

a) coincida con un dato segmento AP (*applicazione esatta* o *parabolica* – fig. 3);
b) sia mancante rispetto ad un dato segmento AP di un tratto BP uguale all'altezza BC dello stesso rettangolo (*applicazione per difetto* o *ellittica* – fig. 4);
c) sia eccedente rispetto ad un dato segmento AP di un tratto PB uguale all'altezza BC del rettangolo medesimo (*applicazione per eccesso* o *iperbolica* – fig. 5).

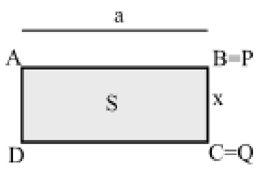

figura 3

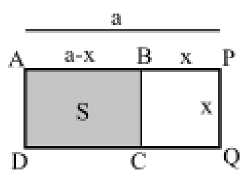

figura 4

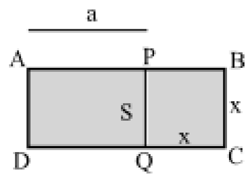

figura 5

Posto che si indichi con a la lunghezza del segmento dato AP e con b quella del lato di un quadrato di area nota S (per cui: $S = b^2$), i problemi di applicazione delle aree portano evidentemente alle seguenti equazioni:

$$a\,x = b^2\,, \qquad x^2 + b^2 = a\,x\,, \qquad x^2 + a\,x = b^2\,,$$

dove x rappresenta l'altezza del rettangolo da costruire sul segmento.

I Babilonesi risolvevano questi problemi per via algebrica secondo Neugebauer, con costruzioni geometriche secondo Hoyrup. Ed i Greci come li risolvevano?

La risoluzione del primo problema, eseguita naturalmente per via geometrica, è contenuta nella prop. 12 del VI libro degli *Elementi*, dove s'insegna a costruire la lunghezza quarta proporzionale dopo tre date. In particolare, date le lunghezze a, b, b, si costruisce (fig. 6) la lunghezza x tale che $a{:}b = b{:}x$, cioè tale che: $ax = b^2$.

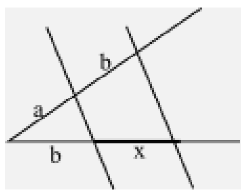

figura 6

Per quanto riguarda il secondo e il terzo problema, che richiedono la risoluzione di equazioni di 2° grado, in realtà non sappiamo se e come i Greci dell'epoca euclidea li abbiano risolti, ma mi piace pensare che lo abbiano fatto con le modalità ipotizzate da Boyer [1, pag. 130 e segg.].

Proviamo allora ad immaginare queste modalità, ma solo con riferimento all'equazione $x^2+b^2=ax$.[7]

Quest'equazione, seguendo l'ipotesi di Boyer, poteva essere risolta tenendo presente la prop. 5 del II libro degli *Elementi* di Euclide, che così recita [2, pag. 166]:

«Se si divide un segmento [AB] in parti uguali [AC e CB] e disuguali [AD e DB], il rettangolo compreso dalle parti disuguali del segmento [ADHK, con DH=DB], insieme col quadrato della parte compresa fra i punti di divisione [LHGE], è equivalente al quadrato della metà del segmento [CBFE].»

Nel nostro linguaggio simbolico (figura 7): $\overline{AD}\cdot\overline{DB}+\overline{CD}^2=\overline{CB}^2$, che è come dire $(p+q)(p-q)+q^2=p^2$, avendo posto: $\overline{AC}=\overline{CB}=\overline{CE}=p$ e $\overline{CD}=\overline{LH}=\overline{LE}=q$.

[7] Per le altre due equazioni rimando a [5, pag. 140 e segg.].

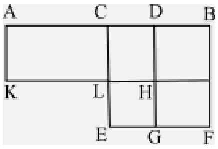


figura 7

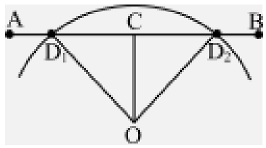


figura 8

A questo punto, con riferimento alla figura 7, siano a la lunghezza del segmento AB, $b^2$ l'area del rettangolo di lati AD e DB e x (l'incognita) la lunghezza di DB. Indicato con C il punto medio di AB, per la prop. 5 si ha:

$$\overline{AD}\cdot\overline{DB}+\overline{CD}^2=\overline{CB}^2 \quad \text{ossia:} \quad b^2+\overline{CD}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Quindi, in base al teorema inverso del teorema di Pitagora, CD è un cateto di un triangolo rettangolo di cui l'altro cateto è lungo b e l'ipotenusa è $a/2$. Il che suggerisce una rapida costruzione di D: considerato il segmento AB, lungo a, e chiamato C il suo punto medio (figura 8), da C si traccia, perpendicolarmente ad AB, il segmento CO, lungo b, e con centro in O si costruisce la circonferenza di raggio $a/2$.

Questa circonferenza, se $a/2>b$, interseca il segmento AB in due punti, $D_1$ e $D_2$, il primo compreso fra A e C, il secondo fra C e B; se $a/2=b$, la circonferenza è tangente ad AB in C, per cui $D_1$ e $D_2$ coincidono con C. Allora, siccome $\overline{CD_1}=\overline{CD_2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$, si ha: $\overline{D_1B}=\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$ e $\overline{D_2B}=\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b^2}$. Sono le due soluzioni dell'equazione considerata, distinte o coincidenti a seconda dei casi. Noi le riassumiamo nella formula: $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b^2}}{2}$.

Questo modo di risolvere i problemi, certamente rigoroso, era apprezzato dalla Matematica ufficiale, ma rendeva la Matematica greca troppo complicata e ciò impedì ogni progresso nel campo dell'Algebra.

Tra i matematici greci ce ne furono alcuni, che per questo potremmo definire "eretici", i quali non sempre seguirono la Matematica ufficiale. Si tratta di Aristarco di Samo (circa 310-230 a.C.), Archimede di Siracusa (287 circa – 212 a.C.), Eratostene di Cirene (circa 273-192 a.C.), Ipparco di Nicea (II sec. a.C.). Essi utilizzarono spesso quella che i Pitagorici chiamavano "logistica" e alla quale non attribuivano dignità di scienza poiché si occupava di pure e semplici tecniche di calcolo numerico.

Ma il primo studioso greco che tentò un certo distacco, se non ancora una vera e propria rottura, dalla Matematica greca classica fu **Erone** di Alessandria (attivo intorno al 100 d.C.). Infatti la sua *Metrica* e la sua *Geometria*, assieme a questioni che si sviluppano nel filone della tradizione euclidea, contengono anche problemi che sono certamente più vicini allo spirito babilonese che a quello greco classico.

Due esempi fra tanti: a) La celebre "formula di Erone", relativa al calcolo dell'area di un triangolo, la cui dimostrazione è esposta nella *Metrica*, non ha sicuramente alcuna interpretazione geometrica, perlomeno in uno spazio tridimensionale, ove si pensi che vengono moltiplicate fra loro quattro lunghezze. b) Nella *Geometria* un problema chiede di calcolare il diametro, la circonferenza e l'area di un cerchio conoscendo la somma delle tre grandezze. Problema che ricorda da vicino quelli dei Babilonesi, ma che è lontano dalla concezione della Matematica ufficiale.

**3.** L'allontanamento definitivo dalla tradizione della Matematica greca classica avvenne con **Diofanto** di Alessandria (II-III sec. d.C.). Egli scrisse un'opera dal titolo *Arithmetica*, che originariamente doveva contenere 13 libri, ma di cui ci sono pervenuti solo i primi 6. Si tratta di una raccolta di circa 150 problemi formulati in termini di esempi numerici specifici e risolti per via aritmetica, senza alcun ricorso a metodi geometrici.

Rifiutato dunque il metodo di Euclide e liberatosi dagli intralci della rappresentazione geometrica dei numeri, il Nostro è portato a sviluppare le regole di un calcolo algebrico astratto. Egli, in realtà, introduce una sorta di simbolismo per rappresentare l'incognita, le sue prime sei potenze e le loro reciproche, per indicare l'addizione, la sottrazione e l'uguaglianza; mostra di conoscere la regola equivalente alla nostra formula per il prodotto di due potenze con la stessa base; enuncia una specie di regola dei segni che utilizza quando deve effettuare un prodotto ma non ne trae nessuna indicazione per l'introduzione dei numeri negativi; applica la regola del trasporto di un termine da un membro all'altro di un'equazione; risolve abitualmente equazioni di 1° e 2° grado in un'incognita, e perciò determinate, ma anche in due incognite e dunque indeterminate. È però <u>interessato alle sole soluzioni razionali positive</u> e sceglie *ad hoc* i coefficienti numerici. L'algebra di Diofanto assomiglia molto a quella babilonese, ma è più “astratta”. Infatti i suoi problemi prescindono da qualsiasi situazione concreta e non hanno nulla a che fare con questioni pratiche, come il seguente problema, tanto per portare un esempio: «Dividere 370 in due cubi di cui la somma delle basi è 10».

Spesso questi problemi hanno più di un’incognita, come nell’esempio riportato. Diofanto li imposta esprimendo tutte le incognite per mezzo di un’incognita soltanto, scelta non necessariamente fra quelle che occorre trovare; calcola quindi il valore di quest’incognita ausiliaria e di conseguenza quelli delle altre risolvendo quella che possiamo chiamare l’equazione risolvente del problema.

Per esempio, riprendendo il succitato problema, le basi sono indicate con $5+x$ e $5-x$ (ovviamente nel nostro linguaggio simbolico), per cui l’equazione risolvente del problema è: $(5+x)^3+(5-x)^3=370$. Da qui segue $x^2=4$ e perciò $x=2$. Ne consegue che le basi dei due cubi sono 7 e 3 e quindi questi cubi sono 343 e 27.

Tra i numerosi problemi elencati e risolti nell’*Arithmetica*, indugio su uno in particolare, quello che chiede di «*dividere un quadrato dato in due quadrati*». Come al solito, Diofanto lo risolve in casi particolari, anche se traspare una conoscenza del risultato generale, che, come noto, è fornito dalle cosiddette “terne pitagoriche”.

Il matematico francese **Pierre de Fermat** (1601-1665) si soffermò su questo problema, come su altri, che ebbe modo di conoscere perché possedeva una traduzione latina del testo greco dell’*Arithmetica*, curata da C.G. de Bachet (1591-1639). Egli, generalizzando il problema di Diofanto, si occupò della seguente equazione: $x^n+y^n=z^n$ e giunse alla conclusione che essa non ha soluzioni intere per n intero maggiore di 2, se si escludono le soluzioni banali in cui almeno una delle incognite è 0. Fermat però non lasciò alcuna dimostrazione e le uniche note in merito sono scritte, in latino, su un margine di una pagina della sua copia dell’*Arithmetica*, proprio di fianco al problema di Diofanto (è la questione 8 del libro 2). Queste note, nella traduzione italiana di Mario Michetti, dicono [3, pag. 2]:

«*Non è, invece, possibile dividere un cubo in due cubi, o un biquadrato in due biquadrati, né, in generale, dividere un’altra potenza di grado superiore al secondo in due altre potenze dello stesso grado: della qual cosa ho scoperto una dimostrazione veramente mirabile, che non può essere contenuta nella ristrettezza del margine*».

Dopo Fermat quasi tutti i matematici, anche i più grandi – Euler, Gauss, Cauchy, per citarne alcuni – hanno tentato di dimostrare quello che venne chiamato *ultimo teorema di Fermat*. In periodi diversi, nell’arco di tre secoli, sono riusciti a dimostrare la proposizione per $n=3$, $n=4$, $n=5$, addirittura fino a valori di n superiori al migliaio. Ma solo nel 1993 il matematico inglese Andrew Wiles (n. 1953) ha dimostrato il teorema per n qualunque.

**4.** L’opera di Diofanto è di notevole importanza per l’influenza che esercitò sui posteri, specialmente arabi ed europei: i primi a partire dal X secolo, dopo la traduzione dell’*Arithmetica* da parte del persiano Abu’l-Wafa (940-998); i secondi in seguito alla scoperta del testo greco dell’opera, fatta dal tedesco Johann Müller, detto Regiomontano (1436-1476).

- Probabilmente l’opera di Diofanto era conosciuta anche presso i matematici indiani, tra i quali mi piace citare **Brahamaguta** (VII sec. d.C.) e **Bhaskara** (XII sec. d.C.).

Nel *Brahmasphuta Siddhānta*, opera principale del primo, è riportata la soluzione generale di un’equazione di 2° grado. Si può leggere anche la regola della moltiplicazione dei numeri relativi: «*Regola di moltiplicazione. Il prodotto di una quantità negativa con una positiva è negativo; di due negative è positivo; di due positive è positivo. Il prodotto di zero con una negativa o di zero con una positiva è nullo; di due zeri è zero*».

Bhaskara, nella sua opera *Bijaganita* (*Algebra*) trovò la soluzione generale dell’equazione $ax^2+bx+c=0$, riconobbe sotto quale condizione essa ha radici reali e sotto quale condizione non le ha. Inoltre accettò, pur con riserve, le eventuali radici negative. Così, per esempio, riguardo all’equazione $x^2-45x=250$, indicò le soluzioni $x=50$ e $x=-5$.

La matematica indiana e, in particolare, quella di Brahamagupta, influenzò quella degli Arabi, forse a partire dall’anno 766. E, mediante questi, dopo la traduzione delle loro opere, influenzò la Matematica europea.

- Il matematico arabo che più di tutti influì sui primi studiosi europei (che, dopo una lunga fase di oscurantismo, ritornavano ad occuparsi di questioni matematiche e, nel caso specifico, di algebra) fu il persiano **Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi** (IX secolo) attraverso l’opera più importante da lui scritta: *Al-jabr wa'l muqabalah*, che vuol dire “trasporto e soppressione”; dove la parola “trasporto” si riferisce alla possibilità di trasportare un termine da un membro all'altro di un'equazione e la parola "soppressione" si riferisce invece alla possibilità di cancellare i termini uguali che si trovano nei due membri dell'equazione.

Quel titolo, nella versione latina pervenutaci, diventò *Liber algebrae et almucabala* e da esso derivò l'attuale termine "algebra", mentre il termine "almucabala" sparì dal linguaggio matematico [(8)].

L'opera, che è un vero e proprio manuale di Algebra elementare, tratta in particolare delle equazioni di 2° grado, le quali sono distinte nei tipi caratterizzati dai seguenti esempi:

$$x^2 = 5\,x,\quad x^2 = 25,\quad x^2 + 10\,x = 39,\quad x^2 + 21 = 10\,x,\quad 3\,x + 4 = x^2.$$

Egli ammette solo coefficienti positivi e inoltre accetta solo le radici positive; anche tutte e due, se è il caso.

Nella prima parte della sua opera al-Khwarizmi indica in maniera meticolosa tutte le operazioni che bisogna effettuare per risolvere ciascuna equazione, ma senza usare alcun simbolismo e quindi con le parole del linguaggio comune (*Algebra retorica*), e inoltre senza fornire alcuna spiegazione. Successivamente spiega la validità dei procedimenti risolutivi col ricorso a dimostrazioni di tipo geometrico, con costruzioni originali.

Altri matematici arabi – che si occuparono di Algebra ma che influirono poco sugli studiosi occidentali poiché furono conosciuti molto tardi e comunque quando l'Algebra degli Europei si era molto evoluta – furono **Abu'l-Wafa** (X secolo), **al-Karkhi** (X-XI sec.) e **Omar Khayyam** (XI-XII sec.).

- Il *Liber algebrae* di al-Khwarizmi e gli *Elementi* di Euclide furono le opere che influirono maggiormente sullo sviluppo della Matematica nel primo periodo del Rinascimento europeo, a partire dal XIV secolo. E ciò anche per merito del matematico pisano **Leonardo Fibonacci** (XII-XIII secolo). Egli, ispirandosi a quelle opere, elaborò le conoscenze acquisite in maniera personale non priva di originalità in alcuni lavori, tra cui il *Liber abaci* (1202). L'opera – un trattato di Aritmetica e Algebra e, nel contempo, una sorta di manuale per i commercianti – comprende, oltre alla descrizione del sistema di numerazione indo-arabo e ad altre cose interessanti, una parte dedicata allo studio delle equazioni di 1° e di 2° grado. Questo studio, condotto senza l'uso di alcun simbolismo algebrico (ancora *Algebra retorica*), non è del tutto originale. In esso, infatti, vengono riproposti i procedimenti di al-Khwarizmi, che Fibonacci mostra di conoscere. Di modo che egli tratta, sì, delle equazioni algebriche, ma risolvendole col ricorso alla rappresentazione geometrica e sempre in casi numerici particolari. Un esempio, tratto dall'opera *Practica geometriae* (1220), chiarirà il modo il procedere di Fibonacci più d'ogni altra spiegazione.

Egli, per risolvere l'equazione, che noi scriviamo nella forma $x^2+4x=140$, considera un segmento AB, di lunghezza 4 e di punto medio C, e lo prolunga di un tratto BD=x (figura 9); quindi costruisce il quadrato BDEF di area $x^2$ e il rettangolo ABFG di area 4x. L'incognita x deve essere tale che il rettangolo ADEG abbia area 140. Infatti: $x^2+4x=140$. Ricorrendo alla prop. 6 del II libro degli *Element*i di Euclide, ottiene: $\overline{AD}\cdot\overline{BD}+\overline{CB}^2=\overline{CD}^2$, cioè: $140+\left(\frac{4}{2}\right)^2=\overline{CD}^2$, da cui ricava: $\overline{CD}=\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+140}$ e, di conseguenza $x=\overline{CD}-\overline{CB}=\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+140}-\frac{4}{2}$, ossia: $x=10$.

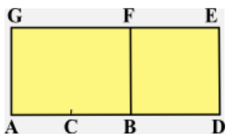

figura 9

Anche se Fibonacci opera sempre in casi numerici semplici, nondimeno si mostra consapevole della generalità delle conclusioni ottenute. Infatti enuncia una regola generale per ciascuno dei seguenti tipi di equazioni:

$$x^2 + a\,x = b,\qquad x^2 + b = a\,x,\qquad a\,x + b = x^2,$$

dove al posto di a, b considera particolari valori numerici, prendendo in ogni caso le soluzioni positive. Così, riguardo alla prima equazione, il Nostro, prendendo in esame la particolare equazione $x^2+4x=140$, trovata la

[8] Il titolo latino di un'altra opera di al-Khwarizmi introdusse nel linguaggio matematico il termine *algorithmus,* che per l'appunto è una latinizzazione di al-Khwarizmi.

radice positiva $x=\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+140}-\frac{4}{2}$, in una libera traduzione dal suo latino, conclude dicendo: «*E così sia sempre in tutti i casi nei quali un numero* [il numerus è il nostro termine noto, b] *è uguale a un quadrato* [$x^2$] *e a radici* [qui è il nostro termine di 1° grado, ax, ma più avanti è la quantità a di queste radici]; *cioè allo stesso numero si aggiunga il quadrato della metà delle radici e si trovi la radice (quadrata) della somma; da queste si tolga la metà delle radici poste*.»

Ossia, con riferimento all'equazione $x^2+ax=b$, appunto: $x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b}-\frac{a}{2}$.

Conclusioni analoghe Fibonacci trae negli altri casi prendendo, per l'equazione $ax+b=x^2$, la sola radice positiva: $x=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b}+\frac{a}{2}$ e, per l'equazione $x^2+b=ax$, entrambe le radici, nell'ipotesi che siano reali e quindi positive, cioè $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}$, nell'ipotesi che sia $\left(\frac{a}{2}\right)^2>b$.

**5.** Dopo Fibonacci e in seguito a contributi di altri studiosi, succedutisi in un periodo che si estende per circa tre secoli e tra i quali si segnala il frate francescano **Luca Pacioli** (1445 -1515 ca.), un notevole passo avanti fu fatto con la pubblicazione dell'opera *In artem analyticem isagoge* (*Introduzione all'arte analitica*, 1591) del francese **François Viète** (1540-1603), avvocato di professione e matematico per hobby. Egli migliorò la teoria delle equazioni introducendo delle lettere al posto dei coefficienti numerici e rese sistematico il calcolo letterale, per cui possiamo dire che la sua è, per la prima volta, un'*Algebra simbolica*. I simboli di cui egli si serviva, tuttavia, sparirono quasi subito dall'uso corrente. In realtà, il simbolismo che si affermò, dopo alterne vicende, fu quello proposto da **René Descartes** (1596-1650) nella sua *Géométrie* (1637).

Ma i risultati più importanti in campo algebrico sono stati ottenuti nel Cinquecento da un gruppo di matematici italiani, passati alla storia come *Algebristi Bolognesi*, i quali riuscirono a risolvere le equazioni di 3° e 4° grado. Si tratta di **Scipione dal Ferro** (1465-1526), **Niccolò Fontana "Tartaglia"** (1505 ca. – 1557), **Gerolamo Cardano** (1501 ca. – 1576), **Ludovico Ferrari** (1522-1565), **Rafael Bombelli** (1526 ca. – 1572).

Mi limito a riassumere il contenuto di quella che Leibniz, circa un secolo più tardi, citerà come esempio di opera magistrale. Si tratta dell'*Algebra* di Bombelli. L'opera, in 5 libri, contiene molte delle cose che figurano in un moderno manuale di algebra, anche se il linguaggio è ancora quello dell'*Algebra retorica*.

- Nel primo libro sono poste le regole di calcolo con i numeri relativi e con i radicali, sono introdotti i numeri complessi e sono indicate le regole di calcolo con essi.
- Nel secondo sono studiati i polinomi algebrici e le equazioni dei primi quattro gradi, fornendo per ciascuna di queste equazioni, la formula risolvente.
- Nel terzo libro sono enunciati oltre 270 problemi che si risolvono con equazioni di uno dei primi 4 gradi.
- Gli ultimi due libri sono dedicati all'analisi dei problemi geometrici e, fra essi, quelli contenuti nei primi quattro libri dell'*Arithmetica* di Diofanto, opera della quale Bombelli, essendone venuto a conoscenza, aveva tradotto dal greco i primi cinque libri.

C'è da rilevare che Bombelli, non accettando i coefficienti negativi e non possedendo perciò la forma generale delle equazioni, è costretto a dilungarsi in un'esposizione minuziosa di tutti i possibili casi che si possono presentare e che, per le equazioni dei primi quattro gradi, sono oltre 60. Bisogna aggiungere che, per rendere legittime le varie regole poste, ne fornisce dimostrazioni geometriche. Inoltre Bombelli continua a rifiutare le radici negative delle equazioni – radici che egli chiama "false" – e, a più forte ragione, le radici complesse, benché del calcolo coi numeri negativi e coi numeri complessi egli si serva, ma per ricercare le soluzioni reali e positive delle equazioni.

Chi contribuì in modo decisivo a rendere sistematica in Occidente l'accettazione delle radici negative di un'equazione (e, più in generale, dei numeri negativi, che però erano stati da tempo introdotti dagli Indiani con relative operazioni) fu **Isaac Newton** (1642-1727), in una serie di lezioni da lui tenute all'Università di Cambridge nel decennio 1673-1683 e pubblicate nel 1707 in un volume dal titolo *Arithmetica universalis*.

I numeri complessi – che né Cartesio né Newton accettarono, se non come artifici per risolvere equazioni – avrebbero ottenuto pieno riconoscimento come "numeri" parecchio tempo dopo, nel 1831, soprattutto per merito del tedesco **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), il "Principe dei matematici". Al quale si deve, tra l'altro, la dimostrazione del cosiddetto *teorema fondamentale dell'Algebra*: «Ogni equazione algebrica in un'incognita, con coefficienti reali o complessi, ammette almeno una radice reale o complessa».

Bisogna dire che il teorema era stato già proposto da altri matematici (D'Alembert, Lagrange, Euler), ma le loro dimostrazioni non erano prive di errori. Cosa che lo stesso Gauss sottolineò.

**6.** Il successo riportato con la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado entusiasmò i matematici, i quali per la prima volta vedevano superati i confini della Matematica antica e fece sorgere la speranza di ottenere un analogo esito trionfale con le equazioni di grado superiore. Solo questione di tempo, pensavano fiduciosi.

Al conseguimento di quest'obiettivo dedicarono gran parte dei loro sforzi anche matematici celebri per circa 250 anni. Ma sempre fallirono e ciò per un ottimo motivo: *non è possibile risolvere per radicali un'equazione di grado superiore al quarto*. Vale a dire: *Non esistono formule risolventi per queste equazioni*. Cosa questa, però, che sarebbe stata scoperta solo agli inizi del XIX secolo, dapprima con i contributi dell'italo-francese **Giuseppe Luigi Lagrange** (1736-1813) e poi con quelli dell'italiano **Paolo Ruffini** [9] (1765-1822) mediante la pubblicazione, avvenuta nel 1799, di un'opera dal lungo titolo *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*.

Con ciò il discorso doveva essere chiuso poiché si stabiliva, in sostanza, l'inutilità di ogni ulteriore ricerca sull'argomento. Sennonché la dimostrazione di Ruffini (che per la verità conteneva dei punti dubbi, che obbligarono il suo autore a rivedere più volte il lavoro) non fu accettata dai matematici se non nel 1822, quando ebbe il riconoscimento ufficiale da parte del celebre matematico francese A. L. Cauchy (1789-1857).

Una dimostrazione indipendente da quella di Ruffini sarebbe stata pubblicata nel 1824 dal norvegese **Niels Henrik Abel** (1802-1829), grande matematico ma giovane sfortunato, morto a poco più di 26 anni a causa di una tubercolosi sopravvenuta in seguito all'indebolimento del suo organismo dopo anni vissuti in miseria.

La sua storia è, per alcuni versi, simile a quella del suo contemporaneo francese **Evariste Galois** (1811-1832). Questi, in una serie di annotazioni – scritte all'età di poco più di vent'anni nella notte fra il 29 e il 30 maggio 1832, alla vigilia di un assurdo duello che l'avrebbe lasciato ferito a morte – chiudeva definitivamente la questione delle equazioni algebriche.

Questa questione, dopo la scoperta di Ruffini-Abel, si poneva in questi termini: è vero che un'equazione generale di grado superiore al quarto non è risolubile per radicali, ma è altrettanto vero che vi sono "molte" equazioni siffatte che si risolvono per radicali. *Quali sono allora le condizioni affinché un'equazione algebrica di grado qualunque sia risolubile per radicali*?

La risposta fu fornita appunto da Galois. Il suo modo originale di affrontare il problema per mezzo dei gruppi di sostituzioni, oggi noto come "teoria dei gruppi di Galois", s'incominciò a conoscere a partire dal 1846 in seguito alla pubblicazione di parte del manoscritto per opera del matematico Joseph Liouville (1809-1882), e diede un decisivo impulso alle ricerche algebriche, indirizzandole verso lo studio di quelle che oggi sono denominate "strutture algebriche", ampliando così la finalità dell'Algebra, che fino a quel momento aveva avuto come obiettivo esclusivo la risoluzione delle equazioni, obiettivo che comunque rimane.

BIBLIOGRAFIA.


[1] Carl B. BOYER, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1976.
[2] EUCLIDE, *Gli Elementi*, Torino, UTET, 1970.
[3] Pierre de FERMAT, *Osservazioni su Diofanto*, Torino, Bollati Boringhieri, 2006.
[4] Livia GIACARDI – Silvia Clara ROERO, *La matematica delle civiltà arcaiche*, Torino, Stampatori, 1979.
[5] Antonino GIAMBO' – Roberto GIAMBO', *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.
[6] Silvio MARACCHIA, *Storia dell'Algebra*, Napoli, Liguori Editore, 2005.


[9] Sono suoi il "teorema di Ruffini" e la "regola di Ruffini" relativi alla divisione del polinomio $P(x)$ per il binomio $x-a$.