Tema: Breve storia della Geometria

di Antonino Giambò

1. Gli *Elementi* (Στοιχεῖα, *Stoichêia*) di Euclide sono l'opera che più di tutte ha influenzato lo studio della Matematica nel corso dei secoli. Quest'opera è un compendio delle conoscenze matematiche dell'epoca in cui visse il suo autore (intorno al 300 a.C.) e costituisce la sintesi di una ricca tradizione di studi matematici, iniziatasi e sviluppatasi in Grecia a partire dal 600 a.C.

Prima dei Greci la Geometria veniva studiata, in particolare da Egizi e Babilonesi, a livello di applicazioni pratiche, dettate dalla necessità di misurare appezzamenti di terreno [(1)], volumi di edifici o di granai, eccetera. Questo perlomeno ci è dato di sapere, stando ai reperti archeologici di cui disponiamo (papiri egizi e tavolette babilonesi) e che testimoniano delle conoscenze, in questo settore, delle civiltà babilonese ed egizia. Conoscenze risalenti all'incirca al XX sec. a.C. Sia i papiri egizi che le tavolette babilonesi presentano problemi vari, anche di geometria, ma sempre relativi a casi specifici, senza alcuna enunciazione di teoremi o di regole generali. E non si trova in essi alcun accenno di ciò che oggi chiamiamo dimostrazione, ma solo indicazioni su "come" fare per risolvere una determinata questione.

È con i Greci che la Geometria assurge a livello di scienza moderna, di scienza cioè che non solo indica "come" ottenere certi risultati, ma spiega anche "perché" bisogna operare in un determinato modo.

Sarebbe interessante conoscere le varie fasi attraverso le quali si è formata la Geometria greca, prima di sfociare nell'opera di Euclide, dove si presenta come prodotto finito, in cui è difficile rintracciarne lo sviluppo storico. Purtroppo le opere dei matematici greci pre-euclidei sono andate perdute in seguito alla distruzione della Biblioteca di Alessandria e oggi non abbiamo che qualche frammento e la ricostruzione che, di quelle opere, hanno fatto commentatori successivi, ma vissuti molto tempo dopo. Il più importante di questi commentatori è il filosofo neo-platonico Proclo di Licia (vissuto nel V sec. d.C.), il quale si rifà ad un riassunto di una *Storia della geometria*, anch'essa perduta, scritta da un discepolo di Aristotele, Eudemo di Rodi (vissuto intorno al 320 a.C.). Abbiamo poi riferimenti alla Matematica del periodo pre-euclideo nelle opere dei filosofi Platone (427-347 a.C.) e Aristotele (384-322 a.C.).

2. Proclo, rifacendosi dunque a testimonianze precedenti e in particolare ad Eudemo, scrisse un *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*. In esso, fra l'altro, delinea una brevissima storia della Matematica greca da Talete ad Euclide, in cui attribuisce a **Talete** di Mileto [(2)] (VII-VI a.C.) la scoperta delle seguenti proprietà delle figure geometriche:

- Ogni diametro divide il cerchio in due parti uguali.
- Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.
- Gli angoli opposti al vertice sono uguali.
- Se due triangoli hanno uguali un lato e i due angoli ad esso adiacenti, sono uguali.

Il filosofo greco Diogene Laerzio (II-III sec. d.C.) attribuisce a Talete queste altre scoperte:

- Un angolo inscritto in un semicerchio è un angolo retto. [Questo teorema, oggigiorno, è denominato "teorema di Talete" nel mondo anglosassone.]
- La misura delle altezze delle piramidi egiziane, ottenuta misurando la lunghezza delle loro ombre quando l'ombra di una persona è lunga quanto la sua altezza.

Le proprietà enunciate sono chiaramente proprietà universali e in questo senso diciamo che Talete contribuì a fondare la Geometria pura come scienza, cioè, per l'appunto, come conoscenza di leggi generali. Qualcuno sostiene che egli abbia dimostrato quelle proprietà, ma è più verosimile che le abbia solo intuite per l'evidente

[1] Il termine "geometria" significa letteralmente "misura della terra".

[2] Mileto (Μίλητος, *Míletos*) era una città dell'Asia Minore, a sud di Smirne. All'epoca di Talete la lingua ufficiale era il dialetto ionico e la città, assieme ad altre, tra cui Samo, patria di Archimede, si costituirono in Lega Ionia per contrastare l'impero persiano.

simmetria che le caratterizza o forse anche le abbia verificate sperimentalmente, e convinto della loro validità generale, ne abbia fatto delle affermazioni universali.

Fra l'altro, detto per inciso, nessuno storico attribuisce a Talete la scoperta del teorema sul fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, che compare con la denominazione di "teorema di Talete" solo dalla seconda metà dell'Ottocento, almeno dalle nostre parti. Per esempio, nell'edizione riveduta e ampliata del 1849 di [3], non c'è traccia del "teorema di Talete", ma compare ancora la stessa formulazione di Euclide (*Elementi*, VI, 2) relativa alla parallela ad uno dei lati di un triangolo, che divide gli altri due lati in parti proporzionali. Com'è noto, si tratta di un caso molto particolare del teorema di Talete. Anche volendo asserire, sulla base della seconda delle questioni attribuitegli da Diogene Laerzio, che Talete avesse qualche idea sulla similitudine, questo non autorizza a pensare che egli avesse consapevolezza del "suo" teorema. In realtà, i concetti che stanno alla base del teorema sono, rispetto a quelli delle altre proprietà attribuite a Talete, troppo astratti per poter essere compresi da una mentalità come la sua, ancora legata a questioni di carattere concreto-operativo

3. Talete, insomma, pur gettando le basi per la costruzione razionale della Geometria, non poteva avere coscienza di questa come sistema ipotetico-deduttivo. Forse perché il suo interesse matematico era prevalentemente pratico; più probabilmente perché le proposizioni geometriche di cui aveva conoscenza erano poche e piuttosto elementari perché potesse avvertire l'esigenza di un'indagine dei principi che ne stanno alla base.

Via via che queste proposizioni si andarono accumulando, col contributo di altri geometri, e diventarono anche più complesse, gli studiosi avvertirono l'interesse a darne giustificazione rifacendosi a proposizioni più semplici, dalle quali le altre potevano essere dedotte. E così, risalendo verso proposizioni sempre meno complesse, si arrivò al punto in cui se ne dovettero accettare alcune senza dimostrazione. Quelle che vennero assunte come assiomi furono le proposizioni giudicate vere perché "evidenti di per sé". E questa concezione permase (3) fino a che, nell'Ottocento, non furono scoperte le cosiddette "geometrie non euclidee", che procurarono una vera e propria crisi nella Matematica. Secondo il matematico e storico danese H. G. Zeuthen (1839-1920), la proposizione che ha suscitato nei geometri l'interesse ad effettuare quel lavoro di risalita verso i principi di base fu quello che oggi chiamiamo "teorema di Pitagora". In realtà, il teorema, perlomeno come costatazione di un dato fatto in casi particolari, era già noto ai Babilonesi. Con i Greci, però, esso assurse a livello di proposizione generale. La leggenda vuole che Pitagora abbia sacrificato un'ecatombe di buoi (un sacrificio di 100 buoi) per quella scoperta (4). Pare dunque che Zeuthen concordi con Proclo nell'attribuire a Pitagora (o ai Pitagorici) la scoperta della dimostrazione. Dice, infatti, Proclo: *«Pitagora trasformò questo studio* [quello della Geometria] *in una forma di insegnamento liberale, risalendo ai primi principi e dimostrando i teoremi in maniera astratta e intellettuale»*.

4. Di **Pitagora** (VI sec. a.C.), come del resto anche di Talete, abbiamo poche notizie. Nato a Samo (Σάμος, Samos), una delle isole del Dodecaneso, non lontano da Mileto, sembra che abbia viaggiato molto, visitando in particolare l'Egitto e la Mesopotamia, per fermarsi stabilmente a Crotone, nell'Italia Meridionale (all'epoca, Magna Grecia), dove fondò una scuola mistico-filosofica, denominata poi "pitagorica", che persistette a lungo, anche dopo la sua morte. Nell'ambito di questa scuola, che ammetteva pure le donne, furono fatte importanti scoperte matematiche. Ma, date le caratteristiche della stessa, che era una specie di setta religiosa, segreta e comunitaria, è difficile stabilire con esattezza la paternità di esse, che dovrebbero dunque essere attribuite genericamente alla "scuola pitagorica" piuttosto che al suo fondatore. Gli storici comunque concordano sul fatto che i più importanti risultati siano da ascrivere ad **Archita** di Taranto (vissuto all'incirca fra il 428 e 360 a.C.), a **Teodoro** di Cirene (attivo intorno al 390 a.C.) e al suo discepolo, l'ateniese **Teeteto** (vissuto all'incirca tra il 415 e il 369 a.C.), considerato uno dei più grandi matematici dell'antica Grecia.

---

[3] Ancora nel 1849 si afferma in [3] che "Assioma è una verità evidente di per se stessa".

[4] Anche Galileo Galilei ne parla nel *Dialogo sui massimi sistemi del mondo* (*Giornata prima*): "Pitagora gran tempo avanti che e' ritrovasse la dimostrazione per la quale fece l'ecatumbe, si era assicurato che 'l quadrato del lato opposto all'angolo retto nel triangolo rettangolo era eguale a i quadrati de gli altri due lati."

Alcune delle scoperte che in campo geometrico la tradizione attribuisce ai Pitagorici sono le seguenti:

- il teorema di Pitagora,
- il teorema relativo alla somma degli angoli di un triangolo,
- la costruzione dei cinque poliedri regolari (5),
- i problemi di applicazione delle aree (6),
- l'incommensurabilità del lato con la diagonale di un quadrato.

La scoperta più importante è senza ombra di dubbio l'incommensurabilità del lato con la diagonale di un quadrato, ma non abbiamo notizie sicure sulla dimostrazione effettuata dai Pitagorici.

É verosimile che essa, per lo stile con cui viene condotta, tipico dei Pitagorici, sia quella riferita da Aristotele nell'opera *Analitici Primi* (I, 26-29). Questa dimostrazione, ricostruita naturalmente in termini moderni, è la seguente ed è addotta da Aristotele come esempio di dimostrazione per assurdo:

Se la lunghezza l del lato e la lunghezza d della diagonale di un quadrato fossero commensurabili, esisterebbero due interi p e q, che si possono supporre primi fra loro, tali che $d:l=p:q$ e perciò: $d^2:l^2=p^2:q^2$.

Poiché, per il teorema di Pitagora: $d^2=2l^2$, allora $p^2=2q^2$. Da quest'ultima uguaglianza segue che p^2 è un numero pari e pertanto anche p lo è. Quindi q, che è primo con p, è dispari.

Poiché il numero pari p si può scrivere come il doppio di un intero r, cioè $p=2r$ e perciò $p^2=4r^2$, allora $2q^2=4r^2$ e quindi $q^2=2r^2$. Dal che si deduce che q^2 è pari e perciò anche q lo è.

Dunque q è contemporaneamente dispari e pari. Il che è manifestamente assurdo. Pertanto si deve concludere che l'ipotesi di partenza è falsa. Cioè il lato e la diagonale di uno stesso quadrato sono incommensurabili.

La scoperta delle grandezze incommensurabili fu un duro colpo per la scuola pitagorica, la quale riteneva che il numero (naturale) fosse il "principio di tutte le cose". Invece, sulla base del numero non si riusciva a spiegare questo fatto apparentemente semplice: se il lato di un quadrato è 1, nessun numero o rapporto di numeri può esprimere la lunghezza della diagonale di quel quadrato.

Pare che si cercasse di nascondere questo fatto sconvolgente, ma senza riuscirvi poiché qualcuno diffuse la notizia. Sembra che costui fosse **Ippaso** di Metaponto (vissuto intorno al 500 a.C.), al quale i più attribuiscono anche la scoperta delle grandezze incommensurabili. Comunque sia andata, secondo quanto asserisce il filosofo siro Giamblico (III-IV sec. d.C.) nella *Vita di Pitagora*: «*Colui che per primo rivelò la natura delle grandezze commensurabili e incommensurabili agli indegni di partecipare a tale cognizione, si dice che incorresse in tanto odio che non solo fu escluso da ogni compagnia e convivenza, ma anche gli fu costruita una tomba, come se colui, che era una volta un compagno, davvero avesse cessato di vivere*».

5. La crisi apertasi con la scoperta delle grandezze incommensurabili, che porta con sé quella degli irrazionali, non venne risolta dai Greci con un ampliamento del concetto di numero, ma col rifiuto degli stessi numeri e con la ricerca di una sintesi in Geometria, giacché i segmenti si adattavano bene a qualsiasi situazione e i numeri invece no. E, di fatto, i libri cosiddetti aritmetici degli *Elementi* di Euclide (VII, VIII, IX) trattano, sì, della teoria dei numeri (naturali) ma rappresentati con segmenti opportuni.

A questa crisi si accompagna poi la critica sull'uso diretto dell'infinito (e dell'infinitamente piccolo) nei ragionamenti matematici, quello che si denomina *infinito attuale*. E questo fin da quando **Zenone** di Elea (7) (V sec. a.C.) aveva mostrato, con i suoi paradossi (celebre quello di Achille e la tartaruga), come l'introduzione dell'infinito nei ragionamenti matematici potesse implicare delle contraddizioni e soprattutto da quando **Aristotele** (384-322 a.C.) aveva inibito di fatto ai matematici l'uso dell'*infinito attuale*: dopo di lui (*ipse dixit*!),

---

[5] Sono chiamati anche *solidi platonici* per il fatto che Platone ne tratta in uno dei suoi dialoghi, il *Timeo*.

[6] Di questi problemi dirò qualcosa nel contributo sulla storia dell'Algebra.

[7] Elea è il nome greco di una città-stato (*polis*) della Magna Grecia, che in epoca romana sarebbe stata denominata Velia. È situata nel comune di Ascea, in provincia di Salerno.

nessun matematico avrebbe osato accettare come rigorosa una dimostrazione basata su questo concetto. Era invece accettabile l'idea di *infinito potenziale* (8).

Il merito di aver risolto questa prima crisi della Matematica fu di **Eudosso** di Cnido (circa 408-355 a.C.), contemporaneo di Platone, di cui secondo alcuni (Proclo) fu discepolo e secondo altri maestro.

Eudosso fornì una definizione di grandezze proporzionali che superava l'inconveniente della incommensurabilità delle grandezze e inoltre si servì, nei suoi ragionamenti, di uno schema molto rigoroso, che nel XVII secolo sarebbe stato chiamato ***metodo di esaustione*** (9).

Avrebbero utilizzato le idee di Eudosso sia Euclide sia Archimede.

6. Oltre alle grandezze incommensurabili, altri problemi angustiavano i geometri dell'epoca pre-euclidea e particolarmente i seguenti tre: la *duplicazione del cubo*, la *trisezione dell'angolo*, la *quadratura del cerchio*. Questi tre problemi sono comunemente noti come i ***problemi classici dell'antichità***. Dovevano essere risolti con l'uso dei <u>soli</u> strumenti "riga" e "compasso" e per oltre due millenni tormentarono i matematici, che non riuscivano a risolverli. Solo dopo che nell'Ottocento fu definitivamente sistemata la teoria delle equazioni algebriche, si scoprì che quei problemi sono insolubili, perlomeno con l'uso esclusivo di quei due strumenti, mentre diventano risolubili con altri strumenti, di tipo geometrico (linee particolari tracciate nel piano) o algebrico (equazioni) e anche, in qualche caso, di tipo tecnico (righello, cioè riga graduata).

Cosa, questa della risolubilità con strumenti "illegali", che per la verità sapevano bene anche gli antichi Greci. Tant'è vero che, appunto con mezzi "illegali":

- risolvettero il problema della "duplicazione del cubo" Ippocrate di Chio (attivo intorno al 430 a.C.), Archita di Taranto, Menecmo di Proconneso (circa 375-325 a.C.) e Diocle di Caristo (III-II sec. a.C.);
- il problema della "trisezione dell'angolo" fu risolto dal sofista Ippia di Elide (V sec. a.C.);
- Dinostrato (IV sec. a.C.), fratello di Menecmo, risolvette il problema della "quadratura del cerchio".

7. **Ippocrate** di Chio (10) fu, secondo Proclo, il primo autore di un libro di *Elementi* (11), e ciò circa un secolo e mezzo prima di Euclide. Gli *Elementi* di Ippocrate sono andati perduti, ma sul loro autore esiste una documentazione importante in un frammento che il filosofo bizantino Simplicio (VI sec. d.C.) dichiara di aver copiato integralmente dalla *Storia della geometria* di Eudemo [2, pag. 77]. Questo frammento tratta della quadratura delle lunule (12). Ippocrate se ne sarebbe occupato nel tentativo di risolvere l'altro problema, ben più importante, della quadratura del cerchio. In realtà, Ippocrate riuscì a quadrare molte lunule con mezzi legali, ma non riuscì a quadrare il cerchio.

Vediamo un esempio, non prima di aver precisato che Ippocrate basa i suoi ragionamenti, otre che sul teorema di Pitagora, anche sul seguente teorema: *Segmenti di cerchio simili stanno tra loro nello stesso rapporto che intercorre tra i quadrati costruiti sulle loro basi* (13).

Eudemo riferisce che Ippocrate dimostrò questo teorema facendo vedere dapprima che i quadrati dei

---

[8] Al fine di comprendere il concetto, cito il pensiero di un matematico a noi vicino, il francese Jules-Henri Poincaré (1854-1912): «*Non esiste un* infinito attuale*; ciò che noi chiamiamo infinito è soltanto la possibilità di creare incessantemente nuovi oggetti, per quanto numerosi siano gli oggetti già creati* [è questo l'infinito potenziale]».

[9] Avrò modo di occuparmene con dovizia di particolari in un articolo sulla storia dell'Analisi Matematica.

[10] Nulla a che fare con il "giuramento di Ippocrate", prestato dai medici all'inizio della loro professione. Questi è infatti il medico Ippocrate di Coo, contemporaneo dell'altro Ippocrate e ritenuto il padre della Medicina.

Chio e Coo sono isole dell'Egeo: Chio (Χίος, Chios) si trova nell'Egeo nord-orientale, nel Nord del Dodecaneso, di fronte alla costa centro-occidentale della Turchia, non lontano da Smirne. Coo (Κῶς, Kos) si trova nel Sud del Dodecaneso, nell'Egeo meridionale, anch'essa vicino alla Turchia. Le due isole distano tra loro circa 180 km.

[11] Secondo Proclo, composero *Elementi di geometria*: un certo Leone, discepolo di Leodamante di Taso, vissuto all'epoca di Platone (427-347 a.C.), e Teudio di Magnesia, vissuto all'epoca di Aristotele (384-322 a.C.) e perciò poco prima di Euclide.

[12] Una *lunula* è la regione piana limitata da due archi circolari di raggio diverso, aventi gli estremi in comune e giacenti da una stessa parte rispetto alla corda che li sottende.

[13] In altri termini: le aree di due segmenti circolari simili sono proporzionali a quelle dei quadrati delle corde da essi sottese. Due segmenti circolari si dicono *simili* se hanno uguali i corrispondenti angoli al centro.

diametri hanno lo stesso rapporto dei cerchi [2, pag. 77]. Infatti il rapporto dei cerchi è lo stesso di quello dei segmenti simili.

Non è spiegato però nel frammento come abbia fatto Ippocrate a giustificare che «i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei rispettivi diametri», che è poi in ultima analisi, il teorema che permette di giungere all'area del cerchio. Questo teorema figurerà negli *Elementi* di Euclide (XII, 2) con la relativa dimostrazione.

Ma, per avere un'idea del suo modo di procedere, vediamo un esempio di quadratura delle lunule secondo Ippocrate, ovviamente descritto con un linguaggio moderno. L'esempio è riferito dal filosofo e commentatore greco Alessandro di Afrodisia (II-III sec. d.C.) [2, pagg. 79-80].

Si circoscrive il semicerchio ad un triangolo rettangolo isoscele ABC e su ciascuno dei cateti uguali, AB e BC, ed esternamente al triangolo, si costruisce ancora un semicerchio (figura 1).

Chiamate A_1 l'area del primo semicerchio e A_2 e A_3 quelle degli altri due, per il teorema di Ippocrate risulta:

$$A_1 : A_2 = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 \quad \text{e} \quad A_2 = A_3 \, .$$

Ma, in virtù del teorema di Pitagora applicato al triangolo ABC, è: $\overline{AC}^2 = 2\,\overline{AB}^2$, di conseguenza: $A_1 = 2\, A_2$ e perciò: $A_2 = \frac{1}{2}\, A_1$. Come dire che il quadrante di cerchio ADBO è equivalente al semicerchio AEB.

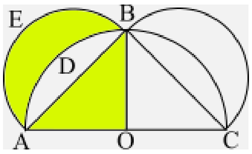

figura 1

Allora, se si toglie il segmento circolare ADB dal quadrante suddetto (ottenendo così il triangolo ABO) o lo si toglie dal semicerchio AEB (ottenendo così la lunula AEBD), le figure residue sono equivalenti.

In conclusione, la lunula AEBD è equivalente al triangolo ABO, che è semplice quadrare, cioè trasformare nel quadrato equivalente.

8. Euclide visse probabilmente fra il 330 e il 260 a.C., fu certamente attivo intorno al 300 a.C.. Della sua vita non si sa nulla, se si esclude che insegnò Matematica in una scuola di Alessandria, chiamata Museo, dove era stato chiamato dal re Tolomeo I (306-283 a.C.). La maggior parte delle pur poche notizie che riguardano la sua vita sono dovute a Proclo.

Si raccontano comunque due aneddoti. Li riprendiamo da Frajese [5, pag. 14].

«*Nel primo aneddoto* (riferito da Proclo) *ci è detto che il re Tolomeo chiese a Euclide se non vi fosse un mezzo più breve degli* Elementi *per imparare la geometria, e che Euclide gli rispose che non esistono vie regie in geometria*».

Nel secondo aneddoto (riportato da Stobeo (14)) si narra che un discepolo, dopo avere imparato taluno dei primi teoremi, chiese ad Euclide: "*Maestro, quale utile ricaverò imparando queste cose?" Ed Euclide chiamò allora un servo e gli diede ordine di dare qualche moneta al malcapitato discepolo (ed evidentemente di cacciarlo via), poiché egli voleva trarre profitto da quanto imparava*».

Il nome di Euclide è inscindibilmente legato ai 13 libri degli ***Elementi***, che ci sono pervenuti integralmente, anche se egli scrisse altre opere, alcune pure rimasteci. Eccone una rapida sintesi:

- Nei primi 4 libri si svolge esclusivamente la Geometria piana, per tutto ciò che può essere trattato indipendentemente dalla teoria delle proporzioni.
  In particolare, il primo libro comprende quelli che al giorno d'oggi denominiamo "teorema di Pitagora" e "primo teorema di Euclide". Precisamente, Euclide fornisce la dimostrazione del teorema che oggi porta il suo nome nella prima parte della proposizione 47 e da questa dimostrazione fa scaturire quella del teorema di Pitagora. Il tutto con considerazioni geometriche. Poi, nella proposizione 48, che chiude il primo libro. enuncia e dimostra quello che chiamiamo "teorema inverso del teorema di Pitagora".
  Non c'è traccia, invece, negli *Elementi*, del cosiddetto "secondo teorema di Euclide", ma ci sono due

[14] Giovanni Stobeo fu un antologista macedone vissuto nel V sec. d.C.

proposizioni ad esso equivalenti, la 14 del libro II (*trasformazione di un rettangolo nel quadrato equivalente*) e la 13 del libro VI (*costruzione del segmento medio proporzionale fra due segmenti dati*).

- La teoria delle proporzioni costituisce l'oggetto del V libro.

Un breve cenno a questa teoria per far capire il genio di Eudosso, giacché a lui è attribuita questa teoria.

Una teoria delle proporzioni, che potremmo definire elementare, era nota ai Pitagorici ed era basata su una definizione che non doveva differire molto dalla seguente:

Date quattro grandezze A, B, C, D, *le prime due omogenee fra loro e così pure le ultime due, se esistono due sottomultiple secondo uno stesso numero* m *della prima e della terza e due sottomultiple secondo uno stesso numero* n *della seconda e della quarta tali che:* $\frac{1}{m}A=\frac{1}{n}B$ *e* $\frac{1}{m}C=\frac{1}{n}D$, *allora le quattro grandezze sono, due a due, nello stesso rapporto. Cioè*: $A:B=C:D$.

La definizione era dunque basata sull'esistenza delle sottomultiple delle grandezze, ossia, in ultima analisi, sull'esistenza di una grandezza U $\left(=\frac{1}{m}A=\frac{1}{n}B\right)$ che fosse sottomultipla comune di A e B e di una grandezza V $\left(=\frac{1}{m}C=\frac{1}{n}D\right)$ che fosse sottomultipla comune di C e D.

Per cui, se A e B (o C e D) sono grandezze incommensurabili la definizione perde di significato.

Eudosso, ritenuto a ragione uno dei più grandi matematici di tutti i tempi, inventò una definizione che non cade in difetto neppure se le grandezze sono incommensurabili. Essa figura come definizione V del libro V degli *Elementi* di Euclide [4, pag. 299]:

Si dice che [quattro] grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto ad una seconda ed una terza rispetto ad una quarta quando risulti che equimultipli della prima e della terza [presi] secondo un multiplo qualsiasi ed equimultipli della seconda e della quarta [presi pure] secondo un multiplo qualsiasi sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente fra i secondi, o tutti e due maggiori o tutti e due uguali o tutti e due minori, se considerati nell'ordine rispettivo.

Ossia, nel nostro linguaggio simbolico:

$$A:B=C:D \text{ se e solo se } mA \gtreqless nB \rightarrow mC \gtreqless nD,\ \forall m,n\in\mathbf{N_0}.$$

Nella definizione IV, essa pure attribuita ad Eudosso, si chiarisce quali siano le grandezze che hanno un rapporto:

Si dice che hanno fra loro un rapporto (o ragione) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente.

Si tratta di un vero e proprio postulato, anche se Euclide non lo dice esplicitamente, che Frajese [4, pag. 298] considera come "il sesto postulato di Euclide". Oggi lo enunceremmo nella forma seguente:

Considerate due qualsiasi grandezze omogenee A e B, *esiste almeno una multipla dell'una che supera l'altra,* oppure, in una forma simbolica e più generale:

$$\forall x\in\mathbb{R}, x>0, \forall y\in\mathbb{R}, y>0, \exists n\in\mathbb{N}: (n-1)x \le y < nx.$$

Lo denominiamo solitamente *postulato di Eudosso-Archimede* perché, se è vero che fu enunciato da Eudosso, è pur vero che fu largamente usato da Archimede nelle sue opere.

- Nel VI libro viene applicata la teoria delle proporzioni, in particolare alle proprietà delle figure simili.
  Come ho già fatto intuire, non c'è traccia negli *Elementi* di quello che oggigiorno chiamiamo "teorema di Talete", anche se c'è una proposizione, la 2 (ne ho accennato qualche pagina addietro), che ne è un caso particolare, e comunque è quella che serve ad Euclide per la sua esposizione.
  La proposizione 30 riguarda la divisione di un segmento in "media ed estrema ragione" (ossia la costruzione, sul segmento, di quella che nell'Ottocento sarebbe stata denominata "sezione aurea"). Problema che era stato affrontato anche nel II libro (prop. 11), ma in termini diversi.
- I libri VII, VIII e IX trattano della teoria dei numeri naturali e ne studiano le proprietà generali.
- Il libro X, il più complesso dell'opera, tratta dettagliatamente delle grandezze incommensurabili.
- I libri XI, XII e XIII si occupano di geometria solida, ma le prime due proposizioni del XII libro mirano alla dimostrazione del teorema secondo il quale "I cerchi stanno tra loro come i quadrati dei diametri".
  In questo stesso XII libro si fa uso per la prima volta (proposizione 2 e altre) del metodo di esaustione. Le prime sei proposizioni del XIII libro riguardano problemi correlati alla divisione di un segmento in "media

ed estrema ragione”, per proseguire e chiudere con la costruzione dei cinque poliedri regolari.

9. Se Euclide si servì a volte del metodo di esaustione, chi lo applicò in modo sistematico fu quello che, secondo gli storici, è considerato il maggiore genio matematico dell’antichità: **Archimede** di Siracusa (287 circa – 212 a.C.). A lui sono attribuite molte opere: una decina certe, un’altra ventina probabili.

Occuparci di tutte le scoperte di Archimede è cosa che non si può fare in poche battute. Ad ogni modo qualcosa dirò in un altro articolo [vedi nota 6] per evidenziare come il Nostro abbia di fatto anticipato concetti dell’Analisi Matematica ben 2.000 anni prima che essa fosse inventata. Qui mi limito a qualche breve notizia.

Bisogna sapere che Archimede scoprì molti risultati in Geometria servendosi di un “metodo meccanico” di sua invenzione. Siccome, però, la matematica ufficiale non avrebbe riconosciuto come validi i ragionamenti da lui seguiti, giacché basati sull’uso diretto di infinito e infinitesimo, uso che era invece inibito, Archimede, per evitare critiche, una volta scoperte delle proprietà con il suo metodo “illegale”, ne eseguiva le dimostrazioni utilizzando appunto il metodo di esaustione, che veniva considerato invece un metodo “legale”.

Ad Archimede si deve la determinazione del valore di π, approssimato con esattezza fino al 2° decimale. Precisamente Archimede, ragionando sulle aree dei poligoni inscritti e circoscritti ad un cerchio, trovò un valore compreso fra $3+\frac{10}{71}$ (≈3,1408) e $3+\frac{10}{70}$ (≈3,1428), per cui era sicuro del valore π fino alla 2ª cifra decimale, vale a dire $\mathbf{3,14}$. Il suo procedimento figura in un piccolo trattato, dal titolo *Sulla misura del cerchio*.

10. Dopo Euclide e Archimede si segnalarono altri geometri nell’antichità e in particolare **Erone** di Alessandria (vissuto tra il I e il II sec. d.C.), **Apollonio** di Perga (circa 262-190 a.C.), **Tolomeo** di Alessandria (II sec. d.C.), **Pappo** di Alessandria (III-IV sec. d.C.) e **Sereno** di Antinopoli (circa IV sec. d.C.).

- Erone è ricordato soprattutto per la nota formula dell’area di un triangolo, ma egli scrisse molte opere, tra cui ricordo la *Metrica*, la *Geometria*, la *Catottrica*.

Dice Boyer [2] che «i libri di Erone hanno l’aspetto di appunti presi da uno studente che frequentasse ad Alessandria una scuola equivalente ad un nostro politecnico».

- Di Apollonio ci è pervenuto, ma senza l’ultimo di 8 libri, un trattato dal titolo *Coniche*, in cui l’autore, pur esponendo l’argomento con “stile euclideo”, anticipa, per certi versi, di 1.800 anni la “Geometria Analitica” di René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665) [15].
- Tolomeo ci ha lasciato un’opera in 13 libri, oggi nota col nome di *Almagesto*, in cui, oltre a importanti teoremi geometrici (tra cui quello, conosciuto come “teorema di Tolomeo”, sul quadrilatero inscritto in un cerchio), sono esposti i principi fondamentali della Trigonometria [16].
- Pappo compose un trattato, pervenutoci quasi integralmente, dal titolo *Collezione matematica*. È una delle ultime opere di Geometria veramente significative dell’antichità. Essa, oltre a fornirci notizie interessanti sui risultati di geometri precedenti, particolarmente di Euclide e Apollonio, arricchisce essa stessa la Geometria con scoperte notevoli che si sarebbero rivelate utili – assieme a quelle contenute nelle *Coniche* di Apollonio – sia ai creatori della Geometria Analitica (Descartes, Fermat) sia a quelli della Geometria Proiettiva (G. Desargues, 1591-1661; B. Pascal, 1623-1662).
- Sereno ci ha lasciato due opere: *Sulle sezioni cilindriche* e *Sulle sezioni coniche*. Sono poco celebrate, forse perché poco conosciute, ma in esse l’autore sviluppa idee originali.

11. La sistemazione euclidea della Geometria elementare rimase praticamente immutata per oltre 2.000 anni e, seppure con fasi alterne, dominò nell’insegnamento fino ai primi anni del Novecento.

---

[15] Ritornerò a occuparmi di Apollonio proprio in occasione di una breve storia della Geometria Analitica.

[16] Ne parlerò più diffusamente proprio in un articolo dedicato alla storia della Trigonometria.

Per comprendere quale fosse l'opinione degli scienziati nei confronti di Euclide ancora agli inizi del Novecento, basti un pensiero di Albert Einstein [17] (1879-1955): *Se Euclide non è riuscito ad accendere il vostro entusiasmo giovanile, non siete nato per essere un pensatore scientifico* [18].

Gli *Elementi* furono una delle prime opere che gli Arabi (IX sec. d.C.) tradussero dal greco in lingua araba e quelle traduzioni, versate poi in lingua latina nel XII sec., fecero conoscere l'opera in Occidente.

Nel 1545 comparve la prima edizione degli *Elementi* in italiano, con traduzione diretta dal greco. Fu opera di Niccolò Fontana, detto Tartaglia (1505 ca. – 1557), il quale erroneamente considerò autore di quegli *Elementi* il filosofo e scienziato Euclide Megarense, fondatore della Scuola megarica, attivo intorno al 400 a.C..

Tornando all'opera, in seguito ad alcune critiche, avviate già da tempo e riproposte con maggiore insistenza nella seconda metà dell'Ottocento, segnatamente dal matematico tedesco **David Hilbert** (1862-1943), gli *Elementi* subirono una sorta di riadattamento operato dallo stesso Hilbert, senza perdere però l'originaria organizzazione. Hilbert pubblicò i suoi risultati nel 1899 in un'opera dal titolo *Grundlagen der Geometrie* (*Fondamenti della Geometria* [19]), divenuto celebre, quasi come gli *Elementi*.

Fra le critiche mosse ad Euclide vi è quella che egli si sarebbe servito, nelle sue dimostrazioni, di ipotesi fondamentali senza averle esplicitamente assunte come postulati. Fra tali ipotesi, in particolare, quelle sulla continuità e sull'ordine.

Bisogna aggiungere che pochi anni prima che Hilbert pubblicasse il suo lavoro, vi erano diverse maniere d'intendere la Geometria: c'era, per esempio, la visione "elementare" di Euclide, quella "proiettiva" di Desargues, quella "non euclidea" di Lobacevskji o di Riemann. Fu per merito di **Felix Klein** (1849-1925), anch'egli tedesco, che queste diverse concezioni furono unificate in una definizione unitaria. Klein, infatti, in un celebre discorso – divenuto famoso come *programma di Erlangen* [20] – pronunciato nel 1872 quando, all'età di 23 anni, divenne professore nell'Università di quella città, definì la **Geometria come lo studio di quelle proprietà delle figure che rimangono invarianti rispetto ad un gruppo di trasformazioni**.

Così, secondo la concezione di Klein:

- la *Geometria metrica* è lo studio delle proprietà delle figure del piano in cui opera come gruppo di trasformazioni più ampio quello dei "movimenti" (vale a dire: traslazioni, rotazioni e simmetrie assiali);
- la *Geometria simile* è lo studio delle proprietà delle figure del piano in cui opera come gruppo di trasformazioni più ampio quello delle "similitudini";
- e così via.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Eric T. BELL, *I grandi matematici*, Firenze, Sansoni, 1966.
[2] Carl B. BOYER, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1976.
[3] BRUNACCI [21] (per opera del Cav.), *Elementi di Algebra e Geometria*, Bologna, Giacomo Monti Editore, 1849; edizione riveduta e ampliata da altri autori.
[4] EUCLIDE, *Gli Elementi*, Torino, UTET, 1970.
[5] Attilio FRAJESE, *Attraverso la storia della matematica*, Firenze, Le Monnier, 1971.
[6] Antonino GIAMBO' – Roberto GIAMBO', *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.
[7] Dirk J. STRUIK, *Matematica: un profilo storico*, Bologna, Il Mulino, 1981.

[17] Una curiosità: Einstein è nato il 14 marzo, data che nel mondo anglosassone è scritta 3/14 ed è considerata il "giorno di π".

[18] Fonte: C. Sitia (a cura di), *La didattica della matematica oggi*, Bologna, Pitagora, 1979, pag. 19.

[19] Una versione italiana dell'opera è pubblicata da Feltrinelli, Milano, 1970.

[20] Erlangen è una città tedesca, situata nella Baviera settentrionale.

[21] Vincenzo Brunacci (Firenze, 1768 – Pisa, 1818), fu ispettore generale di Pubblica Istruzione del Regno d'Italia (periodo napoleonico) e professore nell'Università di Pisa. Le sue lezioni in quella Università furono raccolte e pubblicate in 4 volumi, tra il 1804 e il 1808, col titolo di *Corso di matematica sublime*. [7, pag. 256]