Tema: Breve storia della Trigonometria piana
di Antonino Giambò

1. La Trigonometria fu in origine un supporto puro e semplice dell'Astronomia ed a questo fine fu usata, fra il II sec. a.C. e il X sec. d.C., dai principali astronomi dell'antichità, sia greci (Ipparco, Menelao, Tolomeo) sia indiani (Aryabhata) e arabi (Albatenio, al-Ḵwārizmī, Abu'l-Wafa), fino a quando non diventò una disciplina autonoma (Nasir Eddin, XIII sec.; Regiomontano, 1533). Successivamente si suddivise in Trigonometria piana e Trigonometria sferica (Rhaeticus, 1542). Il termine "Trigonometria" comparve piuttosto tardi (Pitiscus, 1595). Dopo contributi vari (Viète, 1579; Fincke, 1583; Gunter, 1620), l'assetto odierno della disciplina, a parte un primo tentativo (Cavalieri, 1632) e l'introduzione di alcune delle nostre agili notazioni per le funzioni trigonometriche (Oughtred, 1657), si ebbe per merito di uno dei giganti del pensiero matematico (Euler, 1748).

In questo articolo mi propongo di approfondire quanto s'intuisce da questa breve introduzione e cioè come l'evoluzione di questa disciplina abbia interessato un lungo periodo di tempo, circa 2.000 anni, ed abbia fatto registrare il contributo, più o meno grande, di studiosi appartenenti a civiltà e culture diverse.

2. **Ipparco** di Nicea è ritenuto il massimo astronomo osservatore dell'antichità ed è anche considerato il "Padre della Trigonometria". Compì osservazioni astronomiche a Rodi intorno alla metà del II sec. a.C.. Di lui non ci rimane alcuna opera, ma solo qualche riferimento da parte di studiosi vissuti molto tempo dopo. Gli è attribuita la prima compilazione di "tavole trigonometriche". Alcuni storici gli attribuiscono la suddivisione dell'angolo giro in 360 parti uguali. Altri la attribuiscono invece al suo contemporaneo **Ipsicle** di Alessandria.

Apporti allo sviluppo della Trigonometria e, in particolare, della Trigonometria sferica, sono dovuti a **Menelao** di Alessandria (circa I-II sec. d.C.). Di lui ci è pervenuta una traduzione araba dell'opera ***Sphaerica***, tradotta poi in latino, fra gli altri, dal messinese Francesco Maurolico (1494-1575). L'opera tratta della Geometria sulla sfera e delle conseguenti applicazioni ai fenomeni astronomici. Vi figura l'enunciato e la dimostrazione di quello che oggigiorno chiamiamo *teorema di Menelao* [(1)].

Interessanti notizie su Ipparco e Menelao ci vengono in particolare da Tolomeo.

3. **Claudio Tolomeo**, vissuto ad Alessandria nel II sec. d.C., fu autore di importanti opere scientifiche, la principale delle quali, giunta a noi, ha per titolo ***Almagesto*** [(2)]. L'opera, oltre a notizie su Ipparco e Menelao, contiene i principi fondamentali della Trigonometria piana e i primi rudimenti di quella sferica. Vi è sviluppata soprattutto la *teoria geocentrica* (detta appunto anche *teoria tolemaica*), che pone la Terra al centro dell'Universo. Teoria che rimase indiscussa fino al 1543, allorché fu soppiantata dalla *teoria eliocentrica* (o *copernicana*), formulata dall'astronomo polacco **Nikolaj Kopernik** (italianizzato **Niccolò Copernico**, 1473-1543) nella celebre opera ***De orbium coelestium revolutionibus***.

Nell'Almagesto figura un importante teorema di Geometria, da noi conosciuto come *teorema di Tolomeo*. Ce ne occupiamo perché, come vedremo, ha a che fare in qualche modo con la Trigonometria.

TEOREMA (di Tolomeo). Sia ABCD un qualsiasi quadrilatero convesso inscrivibile in un cerchio. Vale la seguente relazione: $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia ABCD il quadrilatero in questione (figura 1). Si prenda sulla diagonale AC il punto E in modo che l'angolo $B\widehat{E}C$ sia uguale all'angolo $B\widehat{A}D$. Si costata che sono uguali gli angoli $A\widehat{E}B$ e $D\widehat{C}B$ in quanto angoli supplementari degli angoli uguali $B\widehat{E}C$ e $B\widehat{A}D$; e inoltre sono uguali sia gli angoli $B\widehat{C}E$ e $A\widehat{D}B$ sia gli angoli $B\widehat{A}E$ e $B\widehat{D}C$ in quanto angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco.

---

1 Cfr.: su questa medesima rubrica, il mio articolo "Proprietà di figure geometriche".

2 In realtà, in origine l'opera s'intitolava *Mathematichè Syntaxis* (Μαθηματικὴ σύνταξις – *Trattato Matematico*), ma già nell'antichità il titolo fu modificato in *Grande trattato matematico*. Successivamente l'attributo "grande" diventò "il più grande" (Μεγίστη – *Megiste*) per differenziare l'opera da quelle "minori" di altri autori e, presso gli Arabi (circa IX secolo), i quali sostantivarono l'aggettivo, diventò *al-Megiste*. Infine i traduttori latini medioevali (Gherardo da Cremona, 1114-1187) trasformarono quest'ultimo titolo in *Almagestum*.

Si desume che sono simili sia i triangoli ABE e DBC sia i triangoli EBC e ABD. In conseguenza di ciò si hanno le seguenti proporzioni: $\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{AE}:\overline{CD}$ e $\overline{BC}:\overline{BD}=\overline{EC}:\overline{AD}$, da cui seguono le uguaglianze:

$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{BD}\cdot\overline{AE}$ e $\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{BD}\cdot\overline{EC}$.

Da qui, sommando membro a membro, si ottiene:

$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{BD}\cdot\overline{AE}+\overline{BD}\cdot\overline{EC}$ o anche: $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{BD}\cdot\left(\overline{AE}+\overline{EC}\right)$.

E infine: $\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$.

Il teorema di Tolomeo ha un interessante corollario, la cui semplice dimostrazione è lasciata a chi legge:

COROLLARIO. Sia ABC un triangolo equilatero e sia P un qualsiasi punto situato sul minore degli archi AB del cerchio circoscritto al triangolo. Si ha: $\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{PB}$.

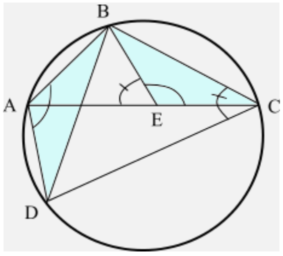

figura 1

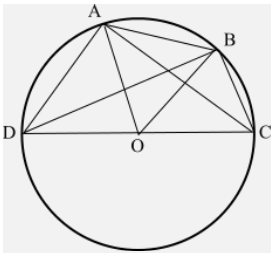

figura 2

- Dal teorema di Tolomeo, nel caso particolare in cui un lato del quadrilatero coincide con il diametro del cerchio, segue la nostra formula di sottrazione del seno. E siccome da questa formula si deducono la formula di sottrazione del coseno e le formule di addizione di seno e coseno, si capisce perché queste quattro formule sono state accomunate sotto il nome di *formule di Tolomeo*, anche se, in realtà, Tolomeo non le pensava nemmeno queste formule, dal momento che sono state trovate secoli dopo di lui.

Ma andiamo a vedere come scaturisca la prima di tali formule, osservando in via preliminare (figura 2) che il teorema di Tolomeo è espresso adesso dalla seguente relazione:

$$\overline{AC}\cdot\overline{DB}=\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{AB}\cdot\overline{CD}\,.$$

Posto ora: $A\widehat{D}C=\alpha$ e $B\widehat{D}C=\beta$, per cui: $A\widehat{O}C=2\alpha$, $B\widehat{O}C=2\beta$, $A\widehat{O}B=2(\alpha-\beta)$, si ha:

$$AC=CD\sin\alpha\,,\quad DB=CD\cos\beta\,,\quad AD=CD\cos\alpha\,,\quad BC=CD\sin\beta\,,\quad AB=CD\sin(\alpha-\beta).$$

Infine, dopo aver sostituito nella relazione di Tolomeo, scritta nella forma $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{DB}-\overline{AD}\cdot\overline{BC}$, e dopo aver semplificato, si trova la formula di sottrazione del seno:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,.$$

- Il 1° libro dell'Almagesto contiene una "tavola delle lunghezze delle corde" di un cerchio di raggio lungo 60 unità di misura sottese da angoli crescenti da 0° a 180° per intervalli di 30'.

È possibile che per la costruzione di questa tavola trigonometrica Tolomeo si sia servito del teorema suddetto equivalente alla nostra formula di sottrazione del seno ed anche di un altro teorema equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.

Vediamo anche questo secondo teorema nel nostro linguaggio simbolico.

TEOREMA. Sia AB una corda di una circonferenza di diametro AC lungo 2R. Se AM è la corda sottesa dall'angolo al centro ampio la metà di quello che sottende la corda AB risulta:

$$\overline{AM}^2=R\left(2R-\overline{BC}\right).$$

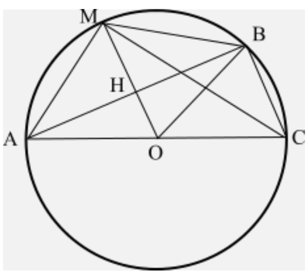

figura 3

DIMOSTRAZIONE. In un cerchio di diametro AC lungo 2R e centro O (figura 3) sia AB una corda lunga L. Siano inoltre H ed M i punti in cui il raggio condotto per O perpendicolarmente ad AB interseca nell'ordine la corda AB e la circonferenza.

Considerato che H è il punto medio di AB, si trova: $\overline{MH} = \overline{OM} - \overline{OH} = R - \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$.

Pertanto, in sequenza:

$$\overline{AM}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{MH}^2 = \frac{L^2}{4} + \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \right)^2 = 2R \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \right) = R \left(2R - \sqrt{4R^2 - L^2} \right).$$

Ora, una volta costatato che $\sqrt{4R^2 - L^2} = \overline{BC}$, la relazione testé dimostrata diventa: $\overline{AM}^2 = R(2R - \overline{BC})$.

Fin qui la dimostrazione del teorema.

Posto adesso $A\hat{O}B = 2\alpha$ e stabilito che $A\hat{C}B = \alpha$ e $A\hat{C}M = \alpha/2$, si trova:

$$\overline{AM} = \overline{AC} \sin A\hat{C}M = 2R \sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \overline{BC} = \overline{AC} \cos A\hat{C}B = 2R\cos\alpha\,.$$

Pertanto, sostituendo questi valori di AM e BC nella relazione di Tolomeo, si ottiene:

$$4R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} = R\,(2R - 2R\cos\alpha) \quad \text{da cui segue:} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Ossia la formula cercata nel caso in cui l'angolo $\alpha/2$ sia acuto.

4. I due maggiori matematici greci [3], **Euclide** (III sec. a.C.) e **Archimede** (287 ca. – 212 a.C.), hanno avuto a che fare con teoremi equivalenti a formule trigonometriche, ma non sembra che abbiano rilevato in essi qualche significato trigonometrico.

- Per quanto riguarda Euclide, figurano negli *Elementi* due proposizioni (libro II, prop. 12 e 13) che si riassumono in quello che oggi denominiamo *teorema del coseno*.

Le due proposizioni, formulate nel nostro linguaggio simbolico, esprimono il fatto che, dato il triangolo ABC e indicata con H la proiezione ortogonale di C sulla retta AB, risulta:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \pm 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AH},$$

dove vale il segno "+" o il segno "– " secondo che l'angolo in A sia ottuso o acuto. Naturalmente, se l'angolo è retto, si ottiene il teorema di Pitagora.

Ognuno vede che la relazione può essere messa nella forma seguente:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos\hat{A}\,,$$

che esprime per l'appunto il teorema del coseno relativamente all'angolo in A.

- Riguardo ad Archimede, gli Arabi gli hanno attribuito quello che essi stessi hanno denominato *teorema della corda spezzata*, il quale risulta essere equivalente alla nostra *formula di sottrazione del seno*, ma che non figura in alcuna delle sue opere tramandateci [3, pag. 160].

TEOREMA (della corda spezzata). Siano AB e BC due corde di un dato cerchio (AB<BC) e siano M il punto medio dell'arco ABC ed H la proiezione ortogonale di M su BC. Allora H è il punto medio della "corda spezzata" ABC, vale a dire: AB+BH=HC.

DIMOSTRAZIONE. Si costruisce il punto D simmetrico di C rispetto ad H e si costata che DM=MC (figura 4). D'altronde AM=MC, per cui il triangolo MDA è isoscele sulla base DA. Ne consegue che $M\hat{D}A = M\hat{A}D$.

Siccome $M\hat{D}C = M\hat{C}D$ e $M\hat{A}B = M\hat{C}D$ allora anche $M\hat{D}C = M\hat{A}B$. Per cui: $M\hat{D}A - M\hat{D}B = M\hat{A}D - M\hat{A}B$, cioè: $B\hat{D}A = B\hat{A}D$. Quindi anche DB=AB. Pertanto, essendo DB+BH=HC, risulta: AB+BH=HC.

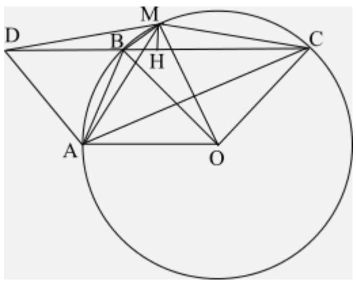

figura 4

[3] Si parla di studiosi "greci" o "arabi" perché le loro opere sono scritte in lingua greca o araba.

Fin qui la dimostrazione del teorema.

Se ora indichiamo con O il centro del cerchio e con R il suo raggio e poniamo $A\hat{O}M=M\hat{O}C=2\alpha$ e $M\hat{O}B=2\beta$, per cui: $A\hat{O}B=2(\alpha-\beta)$, allora, in virtù del teorema dei seni, si ha:

$$MC = 2R\sin\alpha,\ \ MB = 2R\sin\beta,\ \ AB = 2R\sin(\alpha-\beta).$$

In base a queste relazioni, considerato che $M\hat{B}C=\alpha$ e $M\hat{C}B=\beta$, si ottiene:

$$BH = MB\cos M\hat{B}H = 2R\sin\beta\cos\alpha,\quad HC = MC\cos M\hat{C}H = 2R\sin\alpha\cos\beta.$$

Infine, scritta la formula che sintetizza il teorema nella forma AB=HC–BH e sostituite in questa relazione le espressioni trovate sopra, si ottiene la formula di sottrazione del seno:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,.$$

5. Ipparco, Menelao e Tolomeo avevano trovato, e utilizzato per le loro osservazioni, relazioni fra le corde di un cerchio di dato raggio e i corrispondenti angoli al centro. Furono i matematici indiani, e in particolare **Aryabhata** (V-VI sec. d.C.), che trovarono invece relazioni fra la metà della corda e la metà dell'angolo al centro sotteso dall'intera corda. Vale a dire, una nozione molto simile al moderno concetto di seno di un angolo. Essi compilarono perciò, non "tavole delle corde", come aveva fatto Tolomeo, ma qualcosa di molto vicino a "tavole dei seni".

Queste cose figurano nell'opera più famosa di Aryabhata intitolata *Aryabhatiya* (499), ma figurano pure in un trattato di Astronomia dal titolo *Surya Siddhanta* (*Sistema del Sole*, IV-V secolo) di autore sconosciuto.

I matematici arabi – e segnatamente Albatenio, al-Ḵwārizmī, Abu'l-Wafa, Nasir Eddin – che in altri settori della Matematica avevano subito l'influsso dei Greci, riguardo alla Trigonometria seguirono invece gli Indiani, col risultato che la Trigonometria araba si sviluppò sulla base del concetto di seno di un angolo e in questa veste influenzò la Trigonometria occidentale, dopo che furono studiate le traduzioni in latino delle loro opere.

Una curiosità, relativa alla comparsa del termine "seno", avvenuta in Occidente intorno al XII secolo.

In base ad una versione riportata da Boyer (4) [3], il termine "seno" deriva dalla Matematica indiana, anche se pare che esso sia nato da un equivoco. In effetti, i matematici indiani avevano dato il nome di *jiva* a metà della corda (il nostro "seno"), e gli Arabi avevano ereditato questo termine trasformandolo in *jiba*. Nella lingua araba v'è anche la parola *jaib*, che significa "baia" o "insenatura". Sembra che quando i traduttori delle opere arabe si trovarono a dover tradurre il termine tecnico *jiba* lo abbiano confuso con la parola *jaib* (per il fatto che le vocali nelle lingue semitiche non si scrivono); pertanto ricorsero alla parola latina *sinus*, che significa appunto "baia" o "insenatura".

Secondo un'altra versione, riferita da Alem (5) [1], il termine deriva dalla parola "semi-corda". Precisamente, la parola corda è tradotta in latino da *inscripta* (*linea inscritta*) e la metà della corda da *semi inscripta*, abbreviata poi in *s.ins.* e da qui il termine *sinus*.

Il turco **Mohammed ibn Jābir al-Battānī** (noto col nome latinizzato di **Albatenio**, ca. 859-929) fu uno dei maggiori astronomi arabi. A lui è attribuita la scoperta del teorema dei seni. Detto a titolo di curiosità, gli è anche attribuito l'aver stabilito per l'anno solare una durata di 365 giorni, 5 ore, 48 minuti e 24 secondi. Ricordo che attualmente questa durata è fissata in 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, 45 secondi. La sua opera principale, tradotta in latino nel 1116 col titolo *De motu stellarum* da Platone di Tivoli (1110-1145), avrebbe avuto, secoli dopo, una notevole influenza su Copernico e Galileo.

Il matematico e astronomo persiano **Muḥammad ibn Mūsā al-Ḵwārizmī** (IX sec.), diventato celebre in Occidente per motivi collegati per lo più all'Aritmetica, alla Geometria e all'Algebra, compilò tavole dei seni e delle tangenti e fornì contributi anche alla Trigonometria sferica.

Ma il matematico arabo che diede il maggior contributo allo sviluppo della Trigonometria fu ancora un persiano, l'astronomo e matematico **Abu'l-Wafa** (940-998). Egli scrisse molti libri, andati quasi tutti perduti. Con lui la trigonometria acquista un aspetto veramente moderno. Oltre ad una "tavola delle corde dimezzate" (come dire una tavola dei seni) per intervalli di 15′ con valori fino a 8 decimali, egli compose una tavola delle

4 Carl Benjamin Boyer, matematico e saggista statunitense, 1906-1976.

5 Jean-Pierre Alem, pseudonimo di Jean-Pierre Georges Caillot, romanziere e saggista francese, 1912-1995.

tangenti. Dimostrò le formule di addizione del seno e di duplicazione del seno e coseno. Alcuni storici gli attribuiscono anche la dimostrazione delle formule di bisezione. Non si tratta, beninteso, delle formule usate da noi, ma di relazioni equivalenti, certamente più simili a quelle attuali di quanto non lo fossero le formule delle quali si serviva Tolomeo.

Un altro persiano, **Nasir al-Din al-Tusi** (noto come **Nasir Eddin**, 1201-1274), matematico e astronomo, continuò la sua opera, ma ben due secoli più tardi: a lui si deve la separazione della Trigonometria dall'Astronomia.

Mi piace segnalare che appositamente per Nasir Eddin fu costruito a Maragheh, nell'Azerbaigian, un osservatorio astronomico su iniziativa del principe mongolo Hulaghu Khan, fratello del sultano Kubilai Khan, alla corte del quale Marco Polo (1254-1324) trascorse circa 17 anni.

Con Nasir Eddin cessa praticamente il contributo degli Arabi al progresso della Trigonometria, ma la loro eredità e, per merito loro, quella dei Greci vengono raccolte in Europa, anche se all'inizio soltanto passivamente, attraverso la traduzione delle loro opere.

6. Una vera e propria ondata di traduzioni in latino delle opere arabe (comprese le versioni arabe dei classici greci) si ebbe nel XII secolo e continuò per qualche tempo, ma la fase di assimilazione della Matematica fu molto lenta in Occidente: a lungo infatti erano mancati fattori stimolanti per lo studio della Matematica e nessuno possedeva perciò il bagaglio culturale che gli consentisse di comprendere appieno la portata e il significato delle opere tradotte. Bisogna tener presente che nel lungo periodo della dominazione romana, gli studi matematici furono poco curati. Basti pensare che, per circa otto secoli ed ancora nel XII secolo e oltre, costituirono la massima autorità in campo matematico i manuali di **Manlio Severino Boezio** (circa 480-524), filosofo e senatore romano, proclamato Martire e Padre della Chiesa. In realtà, i suoi manuali, riferiti a quelle che egli definì discipline del *quadrivio* (*De institutione arithmetica*, *De institutione musica*, *De institutione geometrica*, *De institutione astronomica*, gli ultimi due andati perduti), sono piuttosto poveri di contenuto matematico.

Non di meno, a partire dal XII secolo c'è un primo risveglio in Occidente, soprattutto per quanto riguarda l'interesse in campo aritmetico e geometrico. E il merito principale di ciò va ascritto a due studiosi: il matematico, astronomo e filosofo spagnolo **Abraham bar Hiyya** (noto con lo pseudonimo **Savasorda**, 1070-1136) e il pisano **Leonardo Fibonacci** (circa 1175-1235), capace di elaborare in maniera personale e non priva di originalità molte delle conoscenze acquisite attraverso la traduzione delle opere arabe. La principale delle sue opere, il *Liber abaci* (1202), avrebbe avuto molta influenza sugli sviluppi futuri della Matematica. Fibonacci, in realtà, scrisse altre opere, tra cui in particolare una *Practica geometriae* (1220), nella quale si occupò anche di Trigonometria, senza andare però oltre i risultati di Greci e Arabi.

- Nel settore della Trigonometria, ad ogni modo, una vera e propria rinascita si registra solo a partire dal XV secolo [6], per merito di un matematico e astronomo prussiano: **Johann Müller** (1436-1476), detto **Regiomontano** dal nome della città di nascita: Königsberg [7] (*montagna del re*). Egli, dopo aver portato a termine una traduzione dal greco dell'*Almagesto*, scrisse un trattato dal titolo ***De triangulis omnimodis***, pubblicato postumo nel 1533. La Trigonometria – ma non sull'esempio di Tolomeo bensì su quello di Nasir Eddin, al quale sembra ispirarsi – è organizzata come disciplina a sé, con un'esposizione sistematica in forma che si può ritenere moderna, anche se non vi figura ancora la nostra maneggevole notazione simbolica. Trigonometria piana e sferica figurano ancora assieme.
- Dopo che contributi all'opera di sistemazione della Trigonometria erano venuti dal tedesco **Johannes Werner** (1468-1528), che ricavò le formule che oggi portano il suo nome e quelle di prostaferesi, la

---

[6] Ad onore del vero, nel 1342 il rabbino **Lavi ben Gershon** (1288-1344), noto come **Gersonide**, filosofo, matematico e astronomo francese, scrisse un trattato di trigonometria dal titolo *Su seni, corde e archi*, nel quale, fra l'altro, figurano una dimostrazione del teorema dei seni e tavole trigonometriche con 5 cifre decimali. L'opera, però, scritta in lingua ebraica, restò sconosciuta per lungo tempo e per questo probabilmente non influenzò il progresso della disciplina.

[7] Dal 1946 il nome della città è Kaliningrad.

separazione della Trigonometria piana da quella sferica avvenne con un altro matematico prussiano, **Georg Joachim von Lauchen** (1514-1576), soprannominato **Rhaeticus**, discepolo di Copernico. L'opera che contiene questa separazione è un libretto dal titolo ***De lateribus et angulis triangulorum***, pubblicato nel 1542. In quest'opera egli considerò come argomenti delle funzioni trigonometriche non più gli angoli al centro di un cerchio, ma gli angoli acuti di un triangolo rettangolo. Rhaeticus, inoltre, con l'aiuto di molti calcolatori (8), compilò tavole trigonometriche fino a 10 cifre decimali, a intervalli di 10".

- Fino a questo momento, il termine "Trigonometria" (9) non era mai apparso in alcuna delle opere che si erano occupate di questa materia. Compare, sembra per la prima volta, in un opuscolo di un altro matematico tedesco, **Bartholomäus Pitiscus** (1561-1613), dal titolo, per l'appunto, ***Trigonometria, sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus*** (1595).
- Contemporaneo di Pitiscus fu il francese **François Viète** (1540-1603). I suoi contributi alla Trigonometria sono raccolti essenzialmente in un'opera dal titolo *Canon mathematicus* (1579). Nella quale, oltre alle consuete tavole trigonometriche e ad altri apporti, figurano problemi di risoluzione dei triangoli secondo un criterio che si era andato affermando: scomporre il triangolo in due triangoli rettangoli.

7. Dunque, già verso la fine del XVI secolo la Trigonometria aveva trovato un assetto molto simile a quello attuale, ma sussistevano alcune differenze. In particolare:

- non era stato ancora introdotto il cerchio trigonometrico e i valori trigonometrici di un angolo erano ancora concepiti come lunghezze di particolari segmenti ricavati con riferimento a cerchi di dato raggio;
- le notazioni simboliche non avevano raggiunto il grado di maneggevolezza attuale;
- non erano stati ancora introdotti i logaritmi e quindi non esistevano tavole logaritmo-trigonometriche.

Occupiamoci allora degli ultimi ritocchi.

- Detto dei contributi del danese **Thomas Fincke** (1561-1656), al quale si deve l'introduzione del termine "tangente", che compare per la prima volta nella sua opera ***Geometria Rotundi*** (1583), e dell'inglese **Edmund Gunter** (1581-1626), autore di un'opera dal titolo ***Canon triangulorum*** (1620), nella quale introdusse i termini "coseno" e "cotangente" (10) e inserì le prime tavole logaritmo-trigonometriche a sette cifre decimali (11), una prima sistemazione della trigonometria si ebbe per merito di **Bonaventura Cavalieri** (1591-1647). Il quale, nell'opera ***Directorium generale Uranometricum*** (1632), fra le altre cose dimostrò importanti relazioni trigonometriche e tentò una unificazione della terminologia allora in uso.

Ma l'assetto definitivo, dopo che furono introdotte le abbreviazioni "sin" e "cos" dal matematico inglese **William Oughtred** (1574-1660) nella sua *Trigonometria* (1657), si ebbe per merito di uno dei matematici più prolifici: lo svizzero **Leonhard Euler** (1707-1783). Nelle sue opere, e in particolare nella ***Introductio in analysin infinitorum*** (1748), egli introdusse il cerchio di raggio unitario (*cerchio trigonometrico*), concependo per primo i valori trigonometrici di un angolo come rapporti di segmenti e quindi come numeri puri e non più come lunghezze di particolari segmenti. Sistemò definitivamente la questione delle notazioni trigonometriche: con lui diventarono pressoché definitive le abbreviazioni *sin, cos, tang, sec, cosec, cot*. Ridusse inoltre la risoluzione dei triangoli piani a quattro casi fondamentali, a seconda che siano noti: a) due lati e l'angolo compreso, b) due angoli e il lato adiacente, c) i tre lati, d) due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.

- Insomma, con Euler la Trigonometria trova la sua sistemazione definitiva. Tuttavia, la prima opera di Trigonometria in un assetto simile a quello odierno, se non proprio uguale, è un trattato dell'astronomo e matematico italiano **Antonio Cagnoli** (1743-1816) dal titolo ***Trigonometria piana e sferica*** (1786).

---

[8] È il caso di precisare che si tratta di persone e non di macchine.

[9] Il termine "trigonometria" significa "misura dei triangoli": è infatti composto dai vocaboli greci τρί́γωνον (*trigonon*, triangolo) e μετρία derivato da μέτρον (*metron*, misura).

[10] Il termine "coseno" sta per "complementi sinus", cioè "seno del (l'angolo) complementare", così come il termine "cotangente" sta per "tangente del (l'angolo) complementare". Si capisce che, come gli altri, il termine "cosecante" sta per "secante del (l'angolo) complementare".

[11] I logaritmi erano stati introdotti poco prima per opera di due matematici britannici: lo scozzese **John Napier** (italianizzato **Giovanni Nepero**, 1550-1617) e l'inglese **Henry Briggs** (1561-1638), amico di Gunter.

8. Oggigiorno le funzioni ***seno***, ***coseno***, ***tangente*** sono accomunate sotto la denominazione di **funzioni circolari** (o anche **funzioni goniometriche** o **funzioni trigonometriche**).

Assieme ad esse, ma piuttosto raramente e soprattutto in discipline come l'astronomia e la topografia, sono usate le altre tre funzioni ***secante***, ***cosecante*** e ***cotangente***, reciproche rispettivamente di coseno, seno e tangente.

Mi pare interessante riassumere in un'unica rappresentazione grafica, peraltro conosciuta, queste sei funzioni circolari.

A questo riguardo disegniamo la circonferenza goniometrica k di centro O (figura 5) e ovviamente raggio 1 e consideriamo il generico angolo orientato $A\widehat{O}P$ di ampiezza α.

Tracciamo quindi le rette tangenti a k in A, B e P. Indichiamo con M ed N i punti in cui la tangente in P interseca rispettivamente l'asse x e l'asse y e con T ed S i punti in cui la semiretta OP interseca rispettivamente la tangente in A e quella in B; chiamiamo infine Q la proiezione ortogonale di P sull'asse x. Ebbene, le misure dei segmenti orientati:

(Q,P), (O,Q), (A,T), (O,M), (O,N), (B,S)

sono nell'ordine i valori delle funzioni circolari:

$\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \tan\alpha,\ \sec a,\ \operatorname{cosec}\alpha,\ \operatorname{cotan}\alpha.$

Questo si può spiegare abbastanza facilmente e ne lascio il compito a chi avesse voglia di farlo.

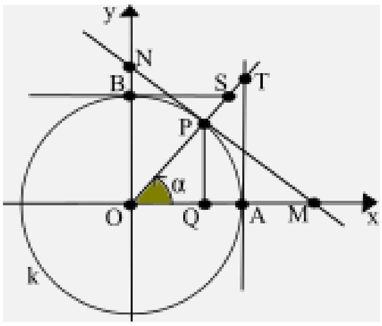

figura 5

Accanto alle sei funzioni trigonometriche già considerate ci sarebbero poi altre funzioni circolari, come le funzioni *arcoseno*, *arcocoseno* e *arcotangente*. Ma si tratta di funzioni attinenti al campo più dell'Analisi matematica che della Trigonometria, per cui fermo qui la nostra disamina.

Aggiungo, per concludere, che tavole trigonometriche (dette anche *tavole dei valori naturali* seno, coseno, tangente, cotangente) e tavole logaritmo-trigonometriche (cioè *logaritmi delle funzioni trigonometriche*) con 5 cifre decimali, per angoli da 0° a 90° a intervalli di 1″, erano in uso nelle scuole italiane ancora negli anni '80 del XX secolo. Al giorno d'oggi invece non sono più utilizzate e costituiscono di fatto un vero e proprio reperto storico. Sono state infatti soppiantate da più funzionali strumenti di calcolo automatico, che fra l'altro rendono inutile il ricorso a speciali formule che in un passato abbastanza recente sembravano fondamentali, come le formule di Nepero e di Briggs.

BIBLIOGRAFIA.

[1] Jean-Pierre ALEM, *Nuovi giochi d'ingegno e divertimenti matematici*, RBA Italia, 2008.
[2] Eric T. BELL, *I grandi matematici*, Firenze, Sansoni, 1966.
[3] Carl B. BOYER, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1976.
[4] EUCLIDE, *Gli Elementi*, Torino, UTET, 1970.
[5] Antonino GIAMBO' – Roberto GIAMBO', *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.
[6] Dirk J. STRUIK, *Matematica: un profilo storico*, Bologna, Il Mulino, 1981.