

La funzione Algebrica della Granita

In queste giornate di caldo afoso di Fase 2, mi è venuta voglia di preparare una granita, e sono rimasto colpito da un articolo del chimico e divulgatore scientifico italiano, Dario Bressanini sulla “[teoria della granita](#)” a tal punto di aver voglia di metterla in pratica.

Del resto siamo ad un passo dagli Esami di Stato 2020, l’agognata maturità che anche quest’anno coinvolgerà migliaia di studenti in tutta Italia.

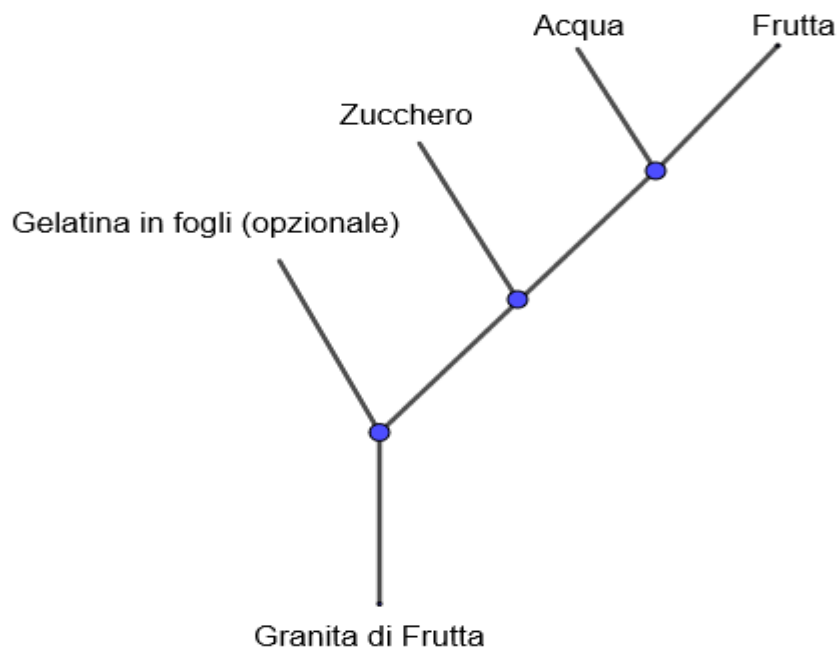
Quindi perché non aiutare i miei studenti con un articolo divulgativo che potranno usare quale spunto per la prova orale degli esami.

Ma partiamo dagli ingredienti della granita.

Gli ingredienti di una granita sono molto semplici e facilmente trovabili in commercio: frutta, acqua e zucchero (un piccolo aiuto, eventualmente, può essere fornito da qualche foglio di gelatina).

Ovviamente si possono eventualmente anche preparare granite non a base di frutta: tra cui sicuramente la granita al caffè è una di quelle più famose.

INGREDIENTI:



(Gli ingredienti della ricetta rappresentati tramite un grafo ad albero)

Quindi se abbiamo un po' di frutta e vogliamo preparare una granita, la snoccioliamo ed eventualmente la peliamo, sempre se necessario, e infine la pesiamo. Ma a tal punto la domanda nasce spontanea: quanta acqua dobbiamo aggiungere e quanto zucchero?

Poi perché dobbiamo aggiungere acqua? Si potrebbe ipotizzare che l'acqua contenuta naturalmente nella frutta sia sufficiente. Perché mai dovremmo diluire il sapore della frutta aggiungendo ulteriore acqua? Possiamo affermare, in quanto dimostrato scientificamente, che il senso del gusto non reagisce in modo lineare, cioè non necessariamente una concentrazione tripla di un aroma ce la rende più piacevole il triplo. A quanto sembra, invece da alcune indagini statistiche emerge che la maggior parte delle persone trova più interessante e piacevole una granita dove gli aromi della frutta sono eventualmente più diluiti.

Ma quanta acqua dobbiamo aggiungere? Ciò sicuramente dipende dall'intensità dell'aroma della frutta che stiamo utilizzando. E' più facile misurare tutto rispetto al peso della frutta. Se abbiamo pesato **F** grammi di frutta chiamiamo **D** (da Diluizione) la percentuale di acqua, in centesimi, che desideriamo aggiungere rispetto alla frutta. Ad esempio, **D=70** significa che l'acqua aggiunta sarà il 70% rispetto alla frutta pesata. **D=150** significa che si deve aggiungere il 150% di acqua, cioè una volta e mezza. Quindi, deciso il valore di **D**, i grammi di acqua da aggiungere, che indicheremo con **A**, saranno dati dalla formula:

$$A = \frac{F \cdot D}{100} \quad (1)$$

Analizziamo ora la quantità di zucchero. Ricordiamo che lo zucchero ha la duplice funzione di dolcificare e di mantenere fluida la granita, quindi calcolare la sua esatta percentuale è importantissimo.

Una granita contiene una percentuale totale di zucchero quasi sempre compreso, tra il 15% e il 20% circa. Indichiamo con **C** la percentuale che desideriamo. Ad esempio, **C=19** significa che la nostra granita contiene il 19% di zuccheri totali. Per calcolare correttamente questa percentuale comunque, necessitiamo di sapere la percentuale di zuccheri presente nei vari frutti in natura. Questa percentuale si può trovare in alcune tabelle pubblicate su siti specializzati come ad esempio: (https://www.inran.it/servizi_cittadino/per_saperne_di_piu/tabelle_composizione_alimenti/) Chiamiamo **P** questa percentuale, sempre espressa in centesimi.

Si dimostra sperimentalmente che la quantità in grammi di zucchero che dobbiamo aggiungere è data dalla seguente formula:

$$Z = \frac{F \cdot (C - P) + A \cdot C}{100 - C} \quad (2)$$

Possiamo, usare questa formula (ricavata empiricamente), per guidare i nostri esperimenti casalinghi, in una duplice valenza, alla ricerca della granita "perfetta" artigianale: infatti, variando **C** alteriamo la dolcezza e la fluidità della granita, mentre variando **F** (e quindi **A**) possiamo aumentare o diminuire l'intensità di sapore lasciando invariata la dolcezza.

In generale, si tende ad ottenere granite (o gelati) non troppo dolci, e quindi dobbiamo mantenere la percentuale **C** attorno a 17, a volte anche meno, ed in tal senso ci possono aiutare i fogli di gelatina. Quanta gelatina dobbiamo usare? Anche in questo caso bisogna sperimentare: si può usare un foglio

di gelatina per ogni chilogrammo di granita. Se la frutta che stiamo utilizzando contiene molte fibre, la gelatina è superflua perché anche queste contribuiscono a rallentare la crescita dei cristalli di ghiaccio. Se invece poi utilizziamo del succo di frutta già filtrato, possiamo aumentare la dose di gelatina. Ci possiamo regolare anche in base alla consistenza finale che vogliamo ottenere. La quantità di gelatina che possiamo usare è molto inferiore a quella che solitamente si usa per gelificare altre preparazioni in pasticceria Panne cotte o Bavaresi, per cui non dobbiamo avere timore di usarla, anche perché è assolutamente inodore e insapore, come ulteriore alternative potremo utilizzare pure gelatine a base vegetale, ormai molto diffuse in pasticceria.

Man mano che si preparano nuovi gusti di granite nel nostro ricettario personale si possono creare delle tabelle come la seguente per non dimenticare le proporzioni:

Frutta	C (Zuccheri totali)	D (Acqua)	P (Zuccheri della frutta)
Melone	17	120	7
Anguria	15	100	5
.....

Ovviamente dopo averle sperimentate, le ricette vanno sempre adattate ai gusti personali dell'assaggiatore e del preparatore.

Ma procediamo ora nell'analizzare la formula precedente dal punto di vista dell'Analisi Matematica, in particolare vediamo la tipologia della funzione utilizzata, studiando l'espressione di Z:

$$Z = \frac{F \cdot (C - P) + A \cdot C}{100 - C}$$

- 1) Partiamo col vedere cosa succede se andiamo a variare C, (eseguimo il prodotto al numeratore e poi raccogliamo il fattor comune C):

$$\begin{aligned} Z(C) &= \frac{F \cdot C - F \cdot P + A \cdot C}{100 - C} = \\ &= \frac{(F + A) \cdot C - F \cdot P}{100 - C} \end{aligned}$$

quindi ponendo: $C = x$, otteniamo:

$$Z(x) = \frac{(F+A)x - F \cdot P}{100 - x} \quad (3) .$$

Abbiamo ottenuto una funzione algebrica razionale fratta di primo grado.

- 2) Se invece consideriamo F come variabile, il procedimento è leggermente più lungo, ma anch'esso interessante per il risultato:

$$\begin{aligned}
 Z(F) &= \frac{F \cdot (C - P) + \frac{F \cdot D \cdot C}{100}}{100 - C} = \\
 &= \left(F \cdot C - F \cdot P + \frac{F \cdot D \cdot C}{100} \right) \cdot \frac{1}{100 - C} = \\
 &= \left(\frac{100 \cdot F \cdot C - 100 \cdot F \cdot P + F \cdot D \cdot C}{100} \right) \cdot \frac{1}{100 - C} = \\
 &= \frac{100 \cdot F \cdot C - 100 \cdot F \cdot P + F \cdot D \cdot C}{100 \cdot (100 - C)}
 \end{aligned}$$

Nella prima parte abbiamo usato la formula (1) sostituita nella formula (2) al posto di A , ed abbiamo poi eseguito i passaggi rispettando l'ordine delle operazioni. Continuando nei passaggi, otteniamo: (possiamo raccogliere in evidenza totale il fattore comune F al numeratore della frazione)

$$\begin{aligned}
 Z(F) &= \frac{F \cdot (100 \cdot C - 100 \cdot P + D \cdot C)}{(10000 - 100C)} = \\
 &= \left(\frac{100 \cdot C - 100 \cdot P + D \cdot C}{10000 - 100 \cdot C} \right) \cdot F
 \end{aligned}$$

Se poniamo $F = x$, stavolta otteniamo:

$$Z(x) = \left(\frac{100 \cdot C - 100 \cdot P + D \cdot C}{10000 - 100 \cdot C} \right) \cdot x \quad (4)$$

cioè una funzione algebrica razionale intera di primo grado, cioè una retta passante per l'origine O , avente coefficiente angolare:

$$m = \left(\frac{100 \cdot C - 100 \cdot P + D \cdot C}{10000 - 100 \cdot C} \right)$$

Vediamo ora il procedimento passo passo della granita di melone, dove nei calcoli, utilizzeremo le formule precedentemente ottenute:



Prendiamo un melone Cantalupo maturo e priviamolo dei semi (Si potrebbe provare anche a preparare la granita di anguria, ma risulta molto laboriosa per via della presenza di tantissimi semi). Dalla pesata il quantitativo di $F = 590$ grammi. Secondo le tabelle nutrizionali circa il 7% sono zuccheri solubili ($P=7$), quindi sono 41 grammi di zucchero già contenuti, infatti posso calcolare il 7% di 590 ed ottengo: $Z_C = \frac{7 \cdot 590}{100} = 41,3\%$.



Poi tagliamo il melone a pezzi e lo inseriamo in una bacinella. Vogliamo una granita con una percentuale finale di zuccheri del 17%, quindi $C=17$. La diluizione D che consideriamo ottimale per i nostri gusti, è di 120. Secondo la formula (1), dobbiamo quindi, aggiungere 708 grammi di acqua, infatti:

$$A = \frac{F \cdot D}{100} \quad \text{con } D = 120 \text{ ed } F = 590$$

Per cui abbiamo:

$$A = \frac{120 \cdot 590}{100} = 708 \text{ grammi}$$

E' inutile dire che si aggiunge qualche grammo in più o in meno acqua non fa molta differenza, l'importante che nel complesso si mantengano le proporzioni.



Utilizzando un cutter o frullatore a immersione (tipo Minipimer, per intenderci) frulliamo bene la frutta. Prendo una mestolata di liquido e, a parte, sciogliamo un foglio di gelatina secondo la procedura standard: prima si lascia gonfiare una decina di minuti a freddo, e poi si scalda piano piano, mescolando, sino a quando la gelatina si è disciolta. La temperatura non dovrebbe superare i 40 gradi. A questo punto rimettiamo il liquido con la gelatina nella boule e aggiungiamo lo zucchero, che secondo le formule precedenti è di 216 grammi.

Infatti partiamo dalla formula (3):

$$Z(x) = \frac{(F + A)x - F \cdot P}{100 - x}$$

Nel nostro caso $F= 590$, $A=708$, $P=7$ e $D=120$, per cui ottengo:

$$\begin{aligned} Z_1(x) &= \frac{(590 + 708)x - 590 \cdot 7}{100 - x} \\ &= \frac{1298x - 4130}{100 - x} \end{aligned}$$

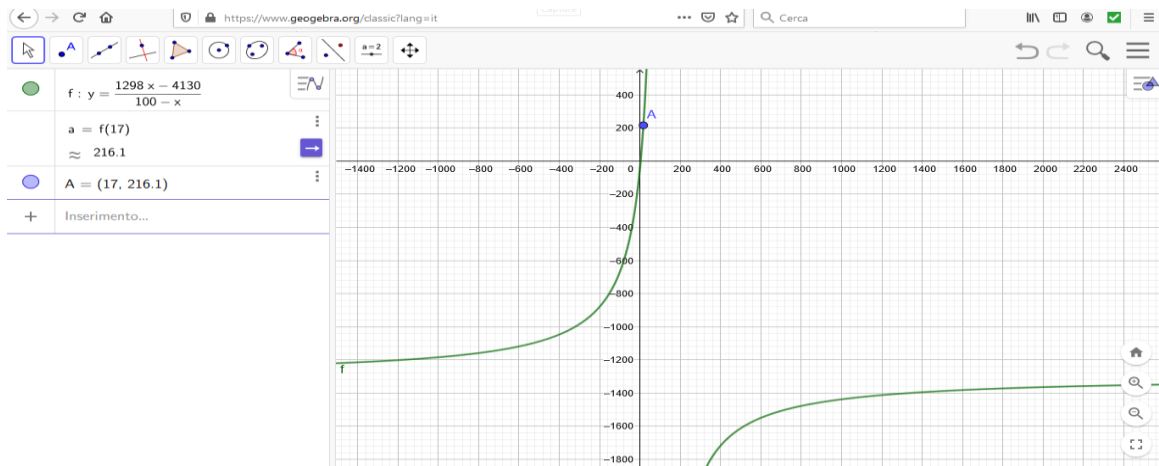
dove la variabile $x = C$.

Per cui per ottenere una percentuale di zuccheri pari a 17, devo calcolare l'immagine $Z_1(17)$:

$$\begin{aligned} Z_1(17) &= \frac{1298 \cdot 17 - 4130}{100 - 17} = \\ &= \frac{22066 - 4130}{83} = \frac{17936}{83} = 216,09 \text{ grammi} \end{aligned}$$

Mescoliamo bene con un cucchiaino sino a che lo zucchero si sarà disciolto tutto. Riponiamo in freezer e dopo un tot di tempo (di solito ogni 30-40 minuti) tiriamo fuori il contenuto, per raschiare il ghiaccio dalle pareti e rimescolare nuovamente.

Analizziamo il grafico della funzione con Geogebra e verifichiamo l'esattezza dei nostri calcoli:



Si tratta comunque di una iperbole equilatera traslata, come era prevedibile, in quanto si tratta di una funzione razionale fratta di primo grado.

Comunque anche il software di Geometria Dinamica, conferma i nostri calcoli. EUREKA!!!!



In realtà sarebbe molto più comodo, invece che usare una bacinella, mettere il liquido da congelare in un contenitore di plastica chiuso. Ogni tanto lo si tira fuori dal freezer e lo si agita violentemente (forse questo procedimento risulta più pratico e facile rispetto al grattare il ghiaccio).



Quando la granita raggiunge la consistenza desiderata la si può servire immediatamente. Volendo si può anche frullarla un po', soprattutto se ci si è dimenticati di mescolare frequentemente durante il raffreddamento

Qui sotto si può notare l'effetto della gelatina: nel bicchiere a destra è stata utilizzata mentre nel bicchiere a sinistra no.



Granita preparata con gelatina (a destra) e senza (a sinistra)

Nota bene: Il contenuto zuccherino della frutta che troviamo nelle tabelle è un dato medio, ovviamente. Ci sono in commercio meloni, ad esempio che potrebbero contenere più del 7% di zucchero come riportato in tabella. Del resto, quella percentuale non si riferisce solo al saccarosio, ma anche agli altri due zuccheri tipici della frutta: il glucosio e il fruttosio, e questi due zuccheri hanno una dolcezza differente, oltre che punti eutettici differenti. Insomma, tutto questo per dire che dovremo, quasi sicuramente, adattare le ricette alla frutta che abbiamo disponibile, secondo il nostro gusto.

Bibliografia:

<http://bressanini-lescienze.blogautore.espresso.repubblica.it/2008/09/15/le-ricette-scientifiche-la-granita-algebrica/comment-page-2/>

Ringrazio la prof.ssa Sandra Lucente, ricercatrice di Analisi Matematica presso l'Università degli Studi di Bari per il supporto ed i consigli fornitomi.