Salvataggio in Mare

Un problema di minimo

Problema

Un Bagnino esercita la sua attività in uno stabilimento balneare in cui la spiaggia è in sabbia e la linea che separa la sabbia dal mare è pressoché rettilinea. La postazione di osservazione del Bagnino dista dalla linea dell'acqua 20m.

Si sa che la velocità massima del Bagnino sulla sabbia è di 100m ogni 18s e che in acqua la sua migliore prestazione in velocità è di 1,5m/s.

Ad un certo punto vede in mare un Bagnante che chiede aiuto e si trova 100m oltre la riva e a distanza di 50m dalla retta perpendicolare condotta dalla posizione del Bagnino alla linea di separazione sabbia-mare.

Il Bagnino si lancia per soccorrere il Bagnante impegnandosi al massimo nella corsa sia sul tratto di spiaggia, sia in quello in acqua.

a) Determinare il percorso che il Bagnino deve seguire affinché il tempo impiegato per raggiungere il Bagnante sia minimo.
b) Determinare il punto in cui il Bagnino deve entrare in acqua e dimostrare che detto punto non è allineato con le posizioni iniziali occupate dal Bagnino e dal Bagnante.

Risoluzione

a) Strategia risolutiva (vedere Figura 1)

1. Come modello geometrico supponiamo che i punti A (posizione del Bagnino), B (posizione del Bagnante in difficoltà) e la linea "rettilinea" di separazione sabbia-mare siano contenuti nello stesso piano. Sia O' il punto in cui il Bagnino entrerà in mare. Nella risoluzione supponiamo (ovviamente) che il Bagnino procederà con la velocità massima di cui è capace percorrendo i due tratti che uniscono A ,O' e O' con B.
2. Il tratto più breve che unisce due punti in un piano è il segmento di retta che passa per quei due punti, quindi certamente il Bagnino seguirà il percorso formato dai segmenti AO' e O'B.

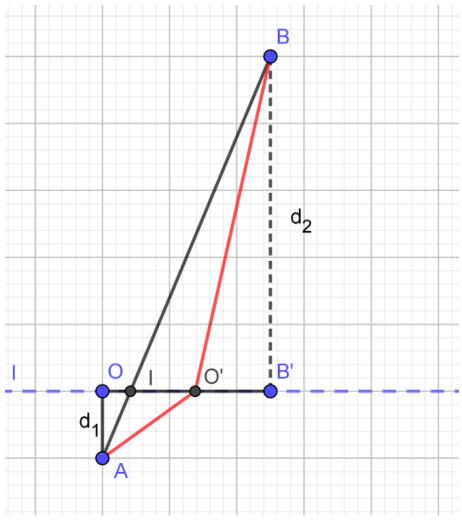

Figura 1

3. Siano d_1 e d_2 rispettivamente le distanze del Bagnino e del Bagnante dalla linea di separazione sabbia-mare. Siano O e B' le proiezioni ortogonali dei punti A e B sulla linea di separazione sabbia-mare; indichiamo con d_3 la misura del segmento OB'.
4. Occorre determinare la posizione di O'. Sia x la misura del segmento OO'; dai dati del problema risulta $0 \le x \le 50$m. Le misure dei segmenti AO' e O'B si determinano applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli AOO', BB'O'. Con i simboli introdotti

$\overline{AO} = d_1$, $\overline{BB'} = d_2$, $\overline{OB'} = d_3$, $\overline{OO'} = x$, $\overline{O'B'} = \overline{OB'} - \overline{OO'} = d_3 - x$,

risulta:

$\overline{AO'} = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{OO'}^2} = \sqrt{d_1^2 + x^2}$; $\overline{O'B} = \sqrt{\overline{O'B'}^2 + \overline{BB'}^2} = \sqrt{(d_3 - x)^2 + d_2^2}$

5. Indichiamo con V_1 la velocità massima del Bagnino quando corre sulla sabbia, con V_2 la velocità massima dello stesso quando nuota; supponendo che in ciascuno dei due tratti il moto sia rettilineo uniforme i tempi di percorrenza sono:

   per il tratto $\overline{AO'} \to \Delta t_1 = \frac{\overline{AO'}}{V_1} = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{V_1}$;

   per il tratto $\overline{O'B} \to \Delta t_2 = \frac{\overline{O'B}}{V_2} = \frac{\sqrt{(d_3 - x)^2 + d_2^2}}{V_2}$.

   Il tempo complessivo T(x) impiegato dal Bagnino per raggiungere il Bagnante è

   $$T(x) = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(d_3 - x)^2 + d_2^2}}{V_2}$$

6. Con le distanze misurate in metri e le velocità in m/s l'espressione della funzione T(x) è

   $$T(x) = \frac{\sqrt{20^2 + x^2}\,(m)}{100/18\left(ms^{-1}\right)} + \frac{\sqrt{(50 - x)^2 + 100^2}\,(m)}{1{,}5\left(ms^{-1}\right)} = \left[\frac{9}{50}\sqrt{20^2 + x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{(50 - x)^2 + 100^2}\right](s)$$

7. Della funzione T(x) occorre determinare al variare di x il minimo. Osserviamo che è una funzione somma di due funzioni irrazionali intere che sono definite per ogni valore di x, ma in questo caso il dominio da considerare è l'intervallo [0;50], in metri. La funzione è continua (nonché derivabile) e dunque per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo. Per trovare il punto x in cui la funzione assume il minimo (assoluto) determiniamo la funzione derivata prima e studiamone segno e zeri. Risulta:

   $$T'(x) = \frac{9}{50} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{20^2 + x^2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot (50 - x)(-1)}{2\sqrt{(50 - x)^2 + 100^2}} = \frac{9x}{50\sqrt{20^2 + x^2}} - \frac{2 \cdot (50 - x)}{3\sqrt{(50 - x)^2 + 100^2}}$$

   Studiando la disequazione $T'(x) \geq 0$ si perviene alla disequazione equivalente

   $27x\sqrt{(50 - x)^2 + 100^2} \geq 100(50 - x)\sqrt{20^2 + x^2}$ nella quale si possono elevare i due membri al quadrato perché nel dominio di ricerca [0;50] sono non negativi. Si ha:

   $$729x^2 \cdot \left[(50 - x)^2 + 100^2\right] \geq 10000(50 - x)^2\left(20^2 + x^2\right) \to$$

   $729x^4 - 72900x^3 + 729 \cdot 100^2 \geq 10^4\left(x^4 + 1000x^3 + 2900x^2 - 200^2 x + 1000^2\right)$ da cui

   $$9271x^4 + 100\left(10^5 + 729\right)x^3 + 29 \cdot 10^6 x^2 - 4 \cdot 10^8 x - 729 \cdot 100^2 \leq 0$$

Il processo di elaborazione indicato è piuttosto complesso e non vale la pena continuarlo. Si possono mettere in atto altri processi di ricerca molto più veloci e snelli. In questo caso utilizzo il **metodo degli incrementi finiti** per la variabile operando direttamente sulla funzione T(x). Le elaborazioni che seguono sono state ottenute con Excel.

1. Organizzo il calcolo dei valori della funzione determinando separatamente i tempi che il Bagnino impiega per percorrere il tratto rettilineo sulla spiaggia AO' e quello rettilineo in mare, che indico rispettivamente con $T_1(x)$ e $T_2(x)$, quindi ne faccio la somma.
2. Calcolo i valori della funzione facendo variare x da 0 (m) a 50(m) fissando inizialmente l'incremento Δx=2 e osservo come cambiano i valori della funzione (Tab.1).
3. Osservo che il valore del tempo massimo impiegato corrisponde al percorso di lunghezza minima sulla sabbia (dove la sua velocità è maggiore), quindi con il percorso A$\to$O$\to$B.

4. Osservo altresì che il tempo minimo non si ha con il percorso $A \to B' \to B$ corrispondente alla massima lunghezza percorsa sulla sabbia ($x=50$m) prima che il Bagnino entri in acqua. Infatti, per $x=50$ il tempo totale impiegato è circa 76,35996s.
5. Dai dati riportati in Tab.1 si evince che il tempo totale diminuisce finché il valore di $x \leq 28$ (m), poi ricomincia a crescere. La funzione $T(x)$ è continua e assume ogni valore compreso tra due suoi valori, quindi il valore minimo deve trovarsi per $27 \leq x \leq 29$. Affino la ricerca impostando il valore per l'incremento (passo) a $\Delta x=0,5$(m) ; le elaborazioni sono in Tab.2.
6. Osservo che il valore del tempo totale diminuisce per $24 \leq x \leq 27,5$ (m), poi ricomincia a crescere. Procedo impostando come nuovo intervallo di ricerca $26,5 \leq x \leq 29,0$ (m) con incremento $\Delta x=0,1$(m). Tab.3

Ricerca con il metodo degli incrementi finiti

Tab.1

Incremento $\Delta x=2$

x	$T_1(x)$	$T_2(x)$	$T=T_1+T_2$
0	3,60000	74,53560	78,13560
2	3,61796	73,94893	77,56689
4	3,67129	73,38180	77,05310
6	3,75851	72,83467	76,59318
8	3,87732	72,30798	76,18530
10	4,02492	71,80220	75,82712
12	4,19829	71,31776	75,51604
14	4,39436	70,85509	75,24945
16	4,61025	70,41464	75,02489
18	4,84330	69,99683	74,84013
20	5,09117	69,60204	74,69321
22	5,35178	69,23069	74,58248
24	5,62338	68,88315	74,50653
26	5,90444	68,55979	74,46423
28	6,19367	68,26094	74,45461
30	6,48999	67,98693	74,47692
32	6,79247	67,73806	74,53052
34	7,10031	67,51461	74,61492
36	7,41285	67,31683	74,72968
38	7,72953	67,14495	74,87448
40	8,04984	66,99917	75,04902
42	8,37339	66,87966	75,25305
44	8,69979	66,78656	75,48635
46	9,02875	66,71998	75,74873
48	9,36000	66,68000	76,04000
50	9,69330	66,66667	76,35996

Tab.2

Incremento $\Delta x=0,5$

x	$T_1(x)$	$T_2(x)$	$T=T_1+T_2$
24,0	5,62338	68,88315	74,50653
24,5	5,69281	68,80003	74,49284
25,0	5,76281	68,71843	74,48124
25,5	5,83336	68,63834	74,47170
26,0	5,90444	68,55979	74,46423
26,5	5,97603	68,48276	74,45879
27,0	6,04811	68,40728	74,45538
27,5	6,12066	68,33333	74,45400
28,0	6,19367	68,26094	74,45461
28,5	6,26713	68,19009	74,45722
29,0	6,34101	68,12081	74,46182
29,5	6,41530	68,05308	74,46839

Tab.3

Incremento $\Delta x=0,1$

x	$T_1(x)$	$T_2(x)$	$T=T_1+T_2$
26,5	5,97603	68,48276	74,45879
26,6	5,99040	68,46754	74,45795
26,7	6,00480	68,45238	74,45719
26,8	6,01922	68,43729	74,45650
26,9	6,03365	68,42225	74,45590
27,0	6,04811	68,40728	74,45538
27,1	6,06258	68,39236	74,45495
27,2	6,07707	68,37751	74,45459
27,3	6,09158	68,36273	74,45431
27,4	6,10611	68,34800	74,45411
27,5	6,12066	68,33333	74,45400
27,6	6,13523	68,31873	74,45396
27,7	6,14981	68,30419	74,45400
27,8	6,16442	68,28971	74,45412
27,9	6,17904	68,27529	74,45433

28,0	6,19367	68,26094	74,45461
28,1	6,20833	68,24664	74,45497
28,2	6,22300	68,23241	74,45542

Tab.4

Incremento $\Delta x=0{,}01$

x	$T_1(x)$	$T_2(x)$	$T=T_1+T_2$	
27,50	6,12066	68,33333	74,453995	
27,51	6,12212	68,33187	74,453988	
27,52	6,12357	68,33041	74,453981	
27,53	6,12503	68,32895	74,453976	
27,54	6,12649	68,32748	74,453971	
27,55	6,12794	68,32602	74,453967	
27,56	6,12940	68,32456	74,453963	
27,57	6,13086	68,32310	74,453961	
27,58	6,13231	68,32165	74,453959	
27,59	6,13377	68,32019	74,453958	minimo
27,60	6,13523	68,31873	74,453958	minimo
27,61	6,13669	68,31727	74,453959	
27,62	6,13814	68,31582	74,453961	
27,63	6,13960	68,31436	74,453963	
27,64	6,14106	68,31291	74,453966	
27,65	6,14252	68,31145	74,453970	

Osservando i dati riportati in Tab.4 si nota che i valori della funzione T(x) diminuiscono per $27{,}50 \leq x \leq 27{,}59$ e riprendono a crescere per $x>27{,}60$. Il valore minimo è indicato nei due punti $x_1=27{,}59$m e $x_2=27{,}60$m . In realtà i valori indicati per i tempi impiegati dal Bagnino seguendo i due percorsi per i quali entra in acqua a distanza di 27,59m e a distanza 27,60m sono approssimati alla 6° cifra decimale. Se riportassimo un numero di cifre maggiore, per esempio fornissimo i risultati con 10 cifre decimali, si avrebbe
$T(27{,}59)= 74{,}4539583330$
$T(27{,}60)= 74{,}4539582600$
quindi $T(27{,}60)< T(27{,}59)$.
E' evidente che si può affinare ulteriormente la ricerca per individuare la posizione del punto O' in cui il Bagnino entra in acqua per procedere ancora in linea retta verso il punto B, ma non è il caso , perché dal punto di vista pratico la precisione a meno di 1cm è più che soddisfacente.

7. Dai dati riportati in Tab.3 si evince che il minimo tempo di percorso è assunto nell'intervallo [27,5;27,7]. Procedo ancora operando con incremento $\Delta x=0{,}01$. I dati ottenuti sono in Tab.4, e per gli stessi sono riportate a fianco delle considerazioni conclusive sulla ricerca.
8. In conclusione, assumendo come margine di errore per il tempo 10^{-6}s, possiamo affermare che il percorso che permette di ottenere il tempo minimo è quello che prevede l'ingresso in acqua del Bagnino nella posizione $x_{O'}=(27{,}60\pm0{,}01)$m e il tempo impiegato è $T\approx74{,}453958$s.

b) Proviamo che il punto O' in cui il Bagnino deve entrare in mare per seguire un percorso ottimo non è allineato con le posizioni A e B occupate nell'istante dell'avvio delle operazioni di salvataggio rispettivamente dal Bagnino e dal Bagnante.

Infatti, sia I il punto di intersezione della retta che unisce le posizioni iniziali A e B del Bagnino e del Bagnante con la linea di separazione della sabbia dal mare (Figura1).

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli AOI, BB'I si ricava l'uguaglianza dei rapporti AO/OI=BB'/IB'; inoltre IB'=OB'-OI per cui risulta

$\frac{AO}{OI}=\frac{BB'}{IB'}$ e $IB'=OB'-OI$

Si ricava l'equazione nell'incognita OI

$\frac{AO}{OI}=\frac{BB'}{OB'-OI}$, da cui $\frac{d_1}{OI}=\frac{d_2}{d_3-OI} \rightarrow OI=\frac{d_1 \cdot d_3}{d_1+d_2}=\frac{20 \cdot 50}{20+100}m \simeq 8{,}33m$

Poiché nella risoluzione del quesito **a)** abbiamo ottenuto che OO'=27,6m deduciamo che O' è diverso da I, dunque A, O' e B non sono allineati.

Concludiamo queste elaborazioni riportando il grafico della funzione T(x) (Figura 2).

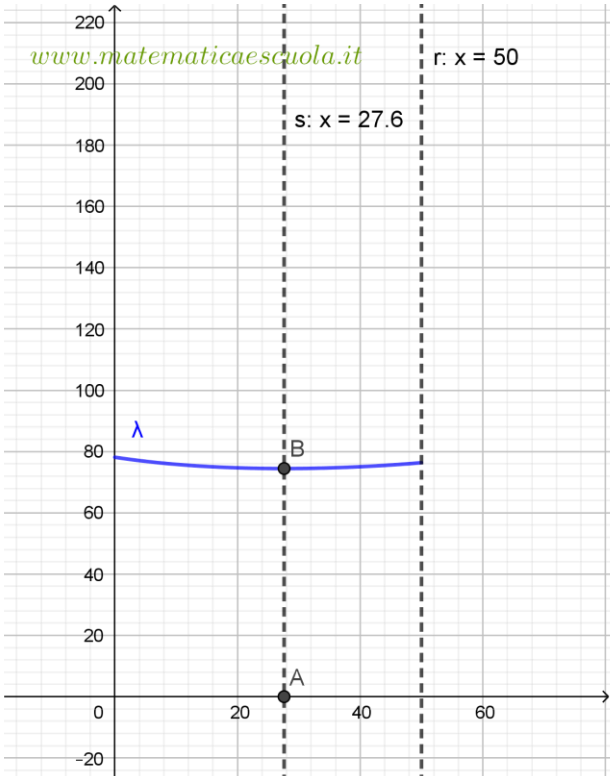

Figura 2- Grafico della Funzione T(x), tempo impiegato dal Bagnino in funzione della distanza x di ingresso in acqua dalla perpendicolare condotta dalla posizione del Bagnino alla linea di separazione sabbia-mare.