Tema: Breve storia della Geometria Analitica
di Antonino Giambò

1. Tra quella che è considerata la data di nascita ufficiale della Geometria Analitica e cioè il 1637, anno della pubblicazione della *Géométrie* di René Descartes, e la data, 1748, in cui essa ha trovato un assetto moderno con la comparsa dell'opera *Introductio in analysin infinitorum* di Leonhard Euler, intercorre un arco di tempo relativamente breve, se paragonato a quelli occorsi per la sistemazione di altri rami della Matematica. E ciò in conseguenza della semplicità dell'idea che sta alla base della disciplina: il riferimento di un piano ad un sistema di coordinate e la rappresentazione nel piano di curve di equazione assegnata.

A dire il vero, un qualche uso delle coordinate era già stato fatto in un passato lontano e anche recente. Per esempio:

- nella *Geographia* di Tolomeo (1) un punto sulla superficie terrestre è indicato con longitudine e latitudine;
- nelle opere di Nicola Oresme (2) e segnatamente nel *Tractatus de latitudinibus formarum* e nella sua opera principale, il *Tractatus de configuratione qualitatum et motuum,* i termini longitudine e latitudine equivalgono alle nostre ascissa e ordinata.

Oresme tracciò anche un grafico velocità-tempo in un moto naturalmente accelerato.

La rappresentazione grafica delle funzioni, indicata allora col nome *latitudo formarum*, costituì un tema di largo interesse fino ai primi anni del Seicento, cioè fino alla vigilia della comparsa della *Géométrie*. Anche Galileo ne fece oggetto di studio.

Se la ricerca non fece registrare a quell'epoca alcun significativo progresso e non riuscì a trasformarsi in quello che sarebbe diventato un formidabile strumento d'indagine matematica, ciò fu dovuto all'inadeguatezza delle conoscenze algebriche. In realtà, solo a partire dalla metà del Cinquecento, con l'opera degli Algebristi Bolognesi, l'Algebra raggiunse un livello di maturità che superava quello precedente e che era il risultato sia dell'opera dell'alessandrino Diofanto fra il III e il IV secolo, sia dell'opera dei matematici indiani tra il VII e il XII secolo ed arabi tra il IX e il XIII secolo.

Ma prima di occuparci della creazione di Descartes dobbiamo fare un salto indietro di quasi 2.000 anni, portandoci all'epoca di Apollonio, poiché è nella sua opera che la Geometria Analitica affonda le sue radici.

2. Apollonio (3) – detto *Pergeo* perché nato a Perga (o Perge), un'antica città della Panfilia, in Asia Minore, vissuto all'incirca tra il 262 e il 190 a.C. – fu autore di numerose opere, delle quali solo due ci sono pervenute e fra queste il suo capolavoro, un trattato in otto libri dal titolo *Coniche*. Dell'opera ci sono giunti però solo i primi sette libri: i primi quattro nell'originale greco, i tre successivi in una versione araba del musulmano Thabit ibn Qurra (826-901).

La prima versione latina di questi tre libri comparve in Europa, e precisamente a Toledo, in Spagna, nel XII secolo e fu opera del famoso traduttore Gherardo da Cremona (1114-1187), che li tradusse dall'arabo.

Per quanto riguarda i primi quattro libri, invece, un codice greco circolava in Italia nel 1427, introdottovi dall'umanista tolentinate Francesco Filelfo (1398-1481), di ritorno dai suoi viaggi a Bisanzio e in Grecia. Ma il contenuto di questi libri s'incominciò a conoscere in Europa solo verso la metà del XVI secolo in seguito alle traduzioni in latino effettuate, dapprima, nel 1537, del veneziano Giovan Battista Memo, e poi, nel 1547, dal messinese Francesco Maurolico (1494-1575) e nel 1566, in una versione più accurata,

---

[1] Claudio Tolomeo, astronomo e matematico alessandrino, visse nel II sec. d.C.. Fu il massimo sostenitore della *teoria geocentrica*. Teoria che egli espone nella sua opera principale, pervenutaci col titolo di *Almagesto*.

[2] Nicola Oresme – filosofo, teologo, psicologo e matematico parigino – fu un personaggio veramente eclettico. Visse nel XIV sec. e fu vescovo di Lisieux.

[3] Su Apollonio e le sue *Coniche* ho avuto modo di scrivere un articolo pubblicato in passato su Periodico di matematiche [6]. Qui lo riprendo in parte, rimandando però a quell'articolo chi volesse saperne di più sulla storia delle "coniche" <u>prima</u> di Apollonio. Ad Apollonio e, più in generale, alla storia della Geometria Analitica io e mio figlio Roberto abbiamo dedicato un capitolo in [7]. Anche questo riprendo qui in parte.

dall'urbinate Federico Commandino (1509-1575). La traduzione di Maurolico vide una nuova pubblicazione nel 1654.

Una traduzione latina di tutti e sette i libri delle *Coniche* fu fatta nel 1710 dall'inglese Edmund Halley (1656-1742), forse più conosciuto per la cometa che da lui prende il nome.

Le *Coniche* trattano delle figure geometriche che si ottengono intersecando un cono circolare indefinito a due falde con un piano. Figure dette appunto *sezioni coniche* o semplicemente *coniche*.

Si definisce *cono circolare indefinito a due falde* la superficie ottenuta facendo ruotare di un giro completo una retta g intorno ad un'altra retta a che la intersechi (figura 1).

L'angolo α formato dalle rette g ed a, che rimane costante nella rotazione, si chiama *angolo di semiapertura* del cono; il punto V d'intersezione delle due rette si dice *vertice* del cono; la retta g si dice *generatrice*, la retta a *asse di rotazione*.

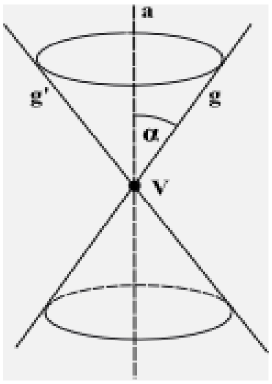

figura 1

Ora, detta α l'ampiezza dell'angolo di semiapertura del cono e chiamata β quella dell'angolo che il piano secante δ (che si suppone non passante per V) forma con la retta a, si ottiene come sezione di δ con il cono:

un'ellisse se $\beta>\alpha$ (figura 2), una parabola se $\beta=\alpha$ (figura 3), un'iperbole se $\beta<\alpha$ (figura 4).

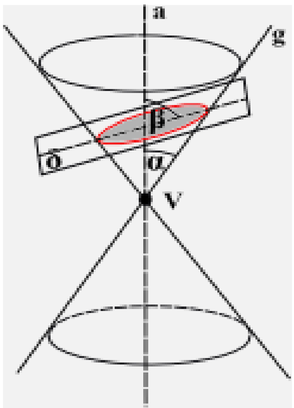

figura 2

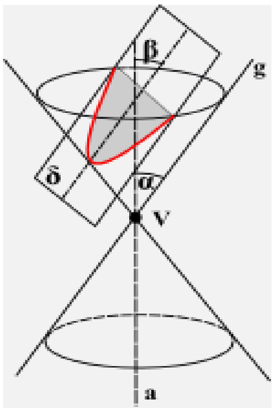

figura 3

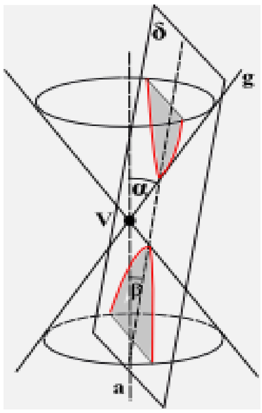

figura 4

3. Mi propongo di far vedere come scaturiscano le denominazioni di parabola, ellisse, iperbole, attribuite alle tre curve da **Apollonio Pergeo.** Lo faccio seguendo, sì, il ragionamento di Apollonio, ma con un linguaggio e un simbolismo a noi più familiare. In realtà, Apollonio non usava alcun simbolismo.

PARABOLA. Dato un cono circolare, si prenda in esame una sua sezione parabolica (figura 5).

Se BC è il diametro della circonferenza ottenuta sezionando il cono con un piano perpendicolare al suo asse di rotazione, sia D il punto in cui il piano della parabola interseca la retta BC. Chiamato P un qualsiasi punto della parabola, si consideri il piano passante per P e perpendicolare all'asse del cono: esso interseca il cono secondo la circonferenza di diametro EF e la parabola nei punti P e Q. La corda PQ, per ragioni di simmetria, risulta perpendicolare ad EF in M. Allora, per il 2° teorema di Euclide applicato al triangolo EFP rettangolo in P, si ha: $\overline{PM}^2 = \overline{EM} \cdot \overline{MF}$. D'altro canto, dalla similitudine dei triangoli AEM e ABD segue:

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}\ ,\quad \text{da cui: } \overline{EM}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}}\ ;$$

inoltre MF=CD (si noti che DM è parallelo a CF). Pertanto: $\overline{PM}^2=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}}\cdot\overline{CD}$ o anche: $\overline{PM}^2=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}}\cdot\overline{AM}$.

Si osserva che la quantità $\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}}$, pur dipendendo dalla parabola considerata, è invariante al variare di P sulla parabola stessa: la indichiamo con k. Ne discende che la precedente relazione, ponendo per comodità $\overline{AM}$=p, $\overline{PM}$=q, può essere scritta nel modo seguente:

$$q^2 = k\,p\,.$$

E si comprende facilmente che questa relazione, interpretata ai nostri occhi come un'equazione nelle indeterminate p, q, è l'equazione di una parabola riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali avente A come origine e la retta AM come asse delle ascisse.

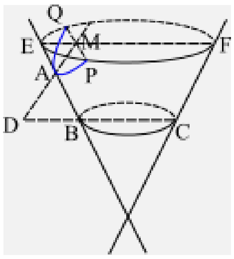

figura 5

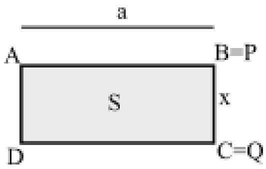

figura 6

La relazione q^2=kp richiamava alla mente di Apollonio quest'altra: S=ax. La quale traduce il problema di *applicare* ad un segmento AB (cioè di costruire su AB) un rettangolo ABCD di area nota S in modo che AB coincida esattamente con un segmento AP, di lunghezza nota a (figura 6). Siccome il termine *applicazione* è espresso in greco dalla parola παραβολή (*parabolé*), ecco la denominazione di ***parabola*** attribuita alla curva caratterizzata dalla relazione q^2=kp.

<u>ELLISSE</u>. Dato un cono circolare, si consideri una sua sezione ellittica (figura 7). Con considerazioni analoghe a quelle esposte trattando della parabola, si desume che si ha: $\overline{PM}^2=\overline{EM}\cdot\overline{MF}$. D'altro canto, dalla similitudine dei triangoli AEM e ABD segue:

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}\quad \text{da cui: } \overline{EM}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}}\,,$$

e dalla similitudine dei triangoli A'FM e A'CD segue:

$$\frac{\overline{FM}}{\overline{A'M}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{A'D}}\quad \text{da cui: } \overline{FM}=\frac{\overline{A'M}\cdot\overline{CD}}{\overline{A'D}}\,.$$

Pertanto: $\overline{PM}^2=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{A'D}}\cdot\overline{AM}\cdot\overline{A'M}$.

Si osserva che la quantità $\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{A'D}}$, pur dipendendo dall'ellisse considerata, è invariante al variare di P sull'ellisse stessa: la indichiamo con k. Osserviamo inoltre che A'M=AA'−AM. Ragion per cui la precedente relazione, ponendo per comodità $\overline{AA'}$=2a, $\overline{AM}$=p, $\overline{PM}$=q, può essere scritta nel modo seguente:

$$q^2 = k\,p\,(2a-p)\,.$$

E non ci vuol molto a comprendere che questa relazione, considerata come un'equazione nelle indeterminate p, q, è l'equazione della curva riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali avente A come origine e la retta AA' come asse delle ascisse. La relazione stessa, mediante la traslazione di equazioni x=p−a, y=q, dopo aver posto $ka^2=b^2$, diventa la nota equazione canonica dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Questa interpretazione, naturalmente, come nel caso della parabola del resto, è compiuta *a posteriori*, in base all'esperienza acquisita dopo la nascita della Geometria Analitica.

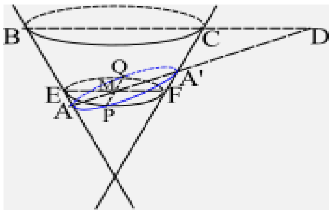

figura 7

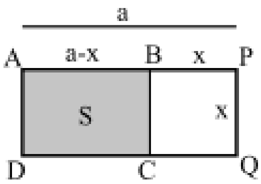

figura 8

La relazione $q^2=kp(2a–p)$ richiamava alla mente di Apollonio quest'altra: $S=x(a-x)$. La quale traduce il problema di costruire su un segmento AB un rettangolo ABCD di area nota S in modo che AB sia *mancante*, rispetto ad un dato segmento AP lungo a, di un tratto BP uguale all'altezza BC dello stesso rettangolo da costruire (figura 8). Siccome il termine *mancanza* è espresso in greco dalla parola ἐλλειψις (*elleipsis*), ecco la denominazione di ***ellisse*** attribuita alla curva caratterizzata dalla relazione $q^2=kp(2a–p)$.

<u>IPERBOLE</u>. Dato un cono circolare, si consideri una sua sezione iperbolica (figura 9). Con le solite considerazioni, si desume che si ha: $\overline{PM}^2=\overline{EM}\cdot\overline{MF}$. Inoltre, per la similitudine dei triangoli AEM e ADC e per quella dei triangoli A'FM e A'DB, segue rispettivamente:

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\quad \text{da cui:}\quad \overline{EM}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}}\ ,\quad \text{e}\quad \frac{\overline{FM}}{\overline{A'M}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{A'D}}\quad \text{da cui:}\quad \overline{FM}=\frac{\overline{A'M}\cdot\overline{BD}}{\overline{A'D}}\,.$$

Pertanto: $\overline{PM}^2=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{A'D}}\cdot\overline{AM}\cdot\overline{A'M}$.

Si osserva che la quantità $\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{A'D}}$, pur dipendendo dall'iperbole considerata, è invariante al variare di P sull'iperbole stessa: la indichiamo con k. Osserviamo inoltre che A'M=AA'+AM. Ragion per cui la precedente relazione, ponendo per comodità $\overline{AA'}=2a$, $\overline{AM}=p$, $\overline{PM}=q$, può essere scritta nel modo seguente:

$$q^2=k\,p\,(2a+p)\,.$$

E non ci vuol molto a comprendere che questa relazione, interpretata come un'equazione nelle indeterminate p, q, è l'equazione della curva riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali avente A come origine e la retta A'A come asse delle ascisse. La relazione stessa, mediante la traslazione di equazioni $x=p+a$, $y=q$, dopo aver posto $ka^2=b^2$, diventa la nota equazione canonica dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Anche queste ultime considerazioni, come nei casi della parabola e dell'ellisse, sono fatte col senno di poi, cioè dopo la nascita della Geometria Analitica.

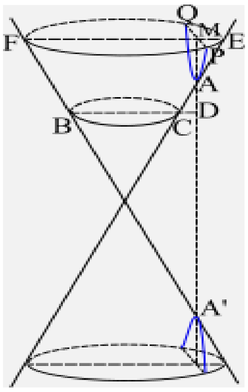

figura 9

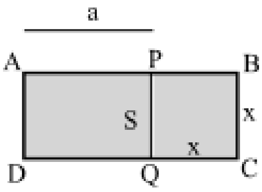

figura 10

La relazione $q^2=kp(2a+p)$ richiamava alla mente di Apollonio quest'altra: $S=x(a+x)$. La quale traduce il problema di costruire su un segmento AB un rettangolo ABCD di area nota S in modo che AB sia *eccedente*, rispetto ad un dato segmento AP lungo a, di un tratto PB uguale all'altezza BC del rettangolo medesimo (figura 10). Siccome il termine *eccesso* è espresso in greco dalla parola ὑπερβολή (*yperbolé*), ecco la denominazione di ***iperbole*** attribuita da Apollonio alla curva caratterizzata dalla relazione $q^2=kp(2a+p)$.

I problemi consistenti nella costruzione di un rettangolo di area nota in modo che la sua base, rispetto ad un dato segmento, sia:

- esattamente uguale ad esso (figura 6);
- mancante rispetto ad esso di un tratto uguale all'altezza incognita del rettangolo (figura 8);
- eccedente rispetto ad esso di un tratto uguale all'altezza incognita del rettangolo (figura 10),

sono denominati *problemi di applicazione delle aree*. Se ne attribuisce la paternità alla scuola pitagorica.

Da quanto esposto si capisce quanto fosse evoluta la geometria di Apollonio. Cito al riguardo un pensiero di Boyer [3, pag. 183]:

I metodi usati da Apollonio nelle Coniche *sono, per molti aspetti, così simili a quelli moderni, che la sua opera viene spesso considerata come una sorta di Geometria Analitica che anticipa di 1800 anni quella di Descartes.*

4. Dopo Apollonio, ma ben 5 secoli dopo, si occupò delle coniche **Sereno** di Antinopoli [4] (IV sec.). Egli dimostrò che le ellissi trattate da Apollonio si potevano ottenere sezionando un cilindro con un piano. Sereno ha esposto queste idee in un trattato *sulle sezioni cilindriche*. In un secondo trattato *sulle sezioni coniche*, si occupò delle sezioni di un cono con un piano passante per il vertice, dichiarando esplicitamente che non era sua intenzione trattare delle sezioni di cui Apollonio si era occupato in maniera esaustiva.

Le intersezioni di un cono circolare indefinito a due falde, avente angolo di semiapertura uguale ad α, con un piano passante per il vertice e formante un angolo β con l'asse di rotazione del cono, sono quelle che i matematici chiamano ***coniche degeneri***. Sono costituite da: - un punto se $\beta>\alpha$; - due rette coincidenti se $\beta=\alpha$ (si tratta sostanzialmente della retta in cui il piano è tangente al cono); - due rette incidenti se $\beta<\alpha$.

Apollonio e Sereno studiano le coniche alla maniera di Euclide, con i mezzi della geometria elementare e con le complicazioni che ciò comporta. Per questo il loro metodo, esauriente per quanto concerne lo studio delle coniche, non è generalizzabile ad altre curve e non consente ulteriori sviluppi. Che, di fatto, non ci furono.

Contemporaneo di Sereno fu un altro matematico di notevole spessore culturale: **Pappo** di Alessandria. Egli compose un trattato in otto libri dal titolo Συναγωγή (*Synagoghé*, conosciuto anche come *Collectiones mathematicae*) nel quale giunse a risultati che erano molto vicini a fargli scoprire il principio fondamentale della Geometria Analitica: la corrispondenza fra curve ed equazioni. Se non compì il passo decisivo la ragione sta verosimilmente nel fatto che Pappo era essenzialmente un geometra, non interessato a questioni algebriche, ma non si escludono difficoltà dovute alla mancanza di un efficace simbolismo algebrico ed al ristagno della teoria delle equazioni.

Questa teoria un bel momento progredì, ma dopo secoli, nel Cinquecento, dapprima con l'opera degli Algebristi Bolognesi (dal Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Bombelli) e poi con quella del francese Viète, il quale diede anche un impulso notevole allo sviluppo del simbolismo algebrico.

5. Affinché fosse possibile un ulteriore progresso mancava solo l'uomo di genio capace di operare una sintesi Algebra-Geometria. Ebbene, di talenti siffatti ve ne furono due nel Seicento: **Renè Descartes** (italianizzato **Renato Cartesio**, 1596-1650) e **Pierre de Fermat** (1601-1665).

Nessuno dei due era un matematico di professione, essendo il primo un filosofo ed il secondo un avvocato. Ma entrambi diedero contributi così importanti e significativi al progresso matematico da essere ritenuti non solo i più grandi matematici del loro tempo ma addirittura tra i primi di tutti i tempi. Fermat fu addirittura definito il "principe dei dilettanti".

- Descartes lasciò una sola opera a carattere matematico, la *Géométrie*, pubblicata nel 1637. Alla sua comparsa si fa generalmente risalire la data di nascita della "Geometria Analitica", che infatti è chiamata

---

[4] Antinopoli era una città fondata sulle rive del Nilo nel II sec. d.C. dall'imperatore Adriano (76-138) in memoria del suo favorito, di nome Antinoo. Oggi ne rimangono solo dei ruderi.

solitamente anche “geometria cartesiana”. Però in tutta l’opera non si fa mai ricorso a quelli che oggi chiamiamo “assi cartesiani” [5]. Né è ricavata l’equazione generale di una retta o di una conica, intese come luoghi geometrici di punti le cui coordinate soddisfano a certe equazioni (di 1° o di 2° grado). Anche se, per la verità, l’Autore lascia intuire molte di queste cose, che egli dice di non voler chiarire per non togliere al lettore il gusto della scoperta [6].

Insomma la *Géométrie*, pur costituendo una pietra miliare nella storia della Matematica poiché stabilisce un collegamento tra Algebra e Geometria (*algebrizzazione della Geometria*), aprendo così la via a nuovi sviluppi, non ha niente a che vedere con un moderno manuale di Geometria Analitica.

Bisogna tuttavia riconoscere che Cartesio contribuì in maniera decisiva alla creazione di quel ramo della Matematica, sia per quanto lasciava intuire nella sua opera, sia soprattutto per la supervisione dell’opera di altri matematici, segnatamente quelli che elaborarono la sua *Géométrie* e che per questo sono legittimamente considerati suoi discepoli.

La *Géométrie* fu pubblicata come terza appendice dell’opera principe di Cartesio, il trattato filosofico conosciuto come *Discours de la Méthode* [7].

- Uno studio sistematico dell’equivalenza tra curve ed equazioni in due indeterminate (segnatamente di 1° e 2° grado) fu compiuto da Fermat in un breve saggio dal titolo *Ad locos planos et solidos isagoge (Introduzione ai luoghi piani e solidi*) pubblicato postumo nel 1679, ma a quanto sembra composto prima dell’uscita della *Géométrie* di Cartesio, intorno al 1629 [3, pag. 400].

In tale opera Fermat studia, rispetto ad un sistema di assi perpendicolari, le seguenti equazioni:

$$a\,x = b\,y\,,\;\; a\,x + b\,y = c^2,\;\; x\,y = k^2,\;\; x^2 + y^2 + 2\,a\,x + 2\,b\,y = c^2,$$
$$a^2 \pm x^2 = b\,y,\;\; x^2 \pm a^2\,y^2 = b^2\,.$$

Inoltre illustra come un’equazione generale di 2° grado irriducibile:

$$a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d^2\,x + e^2\,y + f^{\,3} = 0$$

possa ridursi, con un’opportuna trasformazione di coordinate, ad una delle precedenti equazioni di 2° grado.

Fermat diede veramente una trattazione sistematica ed esauriente delle equazioni algebriche di 1° e 2° grado in due indeterminate, rappresentandole graficamente in un “piano riferito a coordinate” mediante le corrispondenti “rette” e “coniche” o, per meglio dire, quelle parti delle rette e coniche che cadevano nel primo quadrante. Fermat, infatti, come Cartesio del resto, non usava i numeri negativi. Ad ogni modo il suo saggio è molto più vicino ad una moderna concezione della Geometria Analitica che non l’opera di Cartesio.

Tuttavia, il linguaggio e le notazioni usati da Fermat erano molto meno moderni di quelli di Cartesio e appesantivano la lettura della sua opera. Ma soprattutto l’opera di Fermat fu pubblicata 42 anni dopo quella di Cartesio. Per questo oggi soltanto negli ambienti degli esperti è riconosciuto a Fermat il merito di aver creato la Geometria Analitica assieme a Cartesio, se non prima, e comunque indipendentemente da lui. Al di fuori di quegli ambienti, a parte qualche lodevole eccezione, a questa branca della Matematica è solitamente associato solo il nome di Cartesio.

6. Ho avuto modo di sottolineare poco sopra come fosse trascorso poco tempo (42 anni) dalla pubblicazione della *Géométrie* di Cartesio (1637) a quella dell’*Isagoge* di Fermat (1679). Ma questo lasso di tempo fu determinante per far passare in secondo piano il contributo di Fermat alla Geometria Analitica. E ciò perché esso fu sufficiente non solo a far conoscere l’opera di Cartesio ma a far assumere alla Geometria

---

[5] Cartesio sceglie, in relazione ad ogni specifico problema, una certa retta su cui fissa una conveniente lunghezza incognita OP=x e, secondo un’altra direzione, lo spostamento PQ=y.

[6] Queste le testuali parole di Descartes, anche se tradotte in italiano: «*Tuttavia non mi soffermo a spiegare ciò più in dettaglio, poiché vi priverei del piacere di comprenderlo da soli, e dell’utilità di coltivare la vostra mente, esercitandola in ciò che, a mio parere, è il principale vantaggio che si può ricavare da questa scienza*». [5, pag. 499]

[7] Il titolo completo è questo: *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences plus la Dioptrique, les Meteores, et la Géométrie qui sont des essais de cete Methode"* (*Discorso sul metodo per un retto uso della propria ragione e per la ricerca della verità nelle scienze più la Diottrica, le Meteore e la Geometria che sono saggi di questo metodo*).

Analitica un assetto non lontano da quello definitivo, per merito principalmente degli olandesi van Schooten e De Witt e dell'inglese Wallis, tutti in qualche modo ispirati da Cartesio.

La *Géométrie* fu pubblicata in francese e, non essendo un modello di chiarezza espositiva soprattutto per il fatto che lasciava solo intuire molte cose senza precisarle, influì poco in un ambiente, come quello scientifico, in cui la lingua ufficiale era il latino. E questo è veramente paradossale per il Filosofo delle "idee chiare e distinte". E tuttavia rese celebre il suo autore forse più delle sue meditazioni filosofiche. È indicativo, al riguardo, un pensiero del filosofo ed economista britannico John Stuart Mill (1806-1873):

Più di qualunque altra speculazione metafisica (la Geometria Analitica) ha immortalato il nome di Descartes e costituisce il più gran passo che sia stato mai fatto nel progresso delle scienze esatte. [1, pag.35]

Migliore fortuna della *Géométrie* ebbe una versione latina dell'opera, riveduta corretta e ampliata, curata dall'olandese **Frans van Schooten** (1615-1660), professore di Matematica all'Università di Leida, e pubblicata una prima volta nel 1649 e successivamente nel 1659-61 col titolo *Geometria a Renato Des Cartes*.

Nell'edizione del 1659-61 comparvero inoltre delle aggiunte, tra le quali quelle effettuate da **Johann De Witt** (1625-1672), politico e uomo di stato, collaboratore di van Schooten. Le aggiunte di De Witt, recanti il titolo *Elementa curvarum linearum*, introducono le coordinate [8] di un punto in un sistema di riferimento e nell'opera se ne fa un uso sistematico. Inoltre De Witt fa vedere come ogni equazione irriducibile di 2° grado in due incognite possa assumere, con un'opportuna trasformazione di coordinate, la forma canonica di un'ellisse, di una parabola o di una iperbole.

Insomma già l'edizione del 1659-61 della *Geometria* di van Schooten, integrata dalle aggiunte di altri autori, compreso De Witt, non è molto dissimile da un moderno manuale di Geometria Analitica.

Occorre precisare, come d'altronde già accennato, che tanto la traduzione e gli ampliamenti apportati alla *Géométrie* da van Schooten quanto le aggiunte proposte da De Witt e da altri furono effettuate sotto la supervisione di Cartesio quando ancora era in vita.

Altrettanto vale per un'altra opera, che comparve nel 1655 in Inghilterra, il *Tractatus de sectionibus conicis nova methodo expositis* di **John Wallis** (1616-1703), professore all'Università di Oxford. Quest'opera introduce per la prima volta le definizioni di ellisse, parabola e iperbole, sganciandole dal cono da cui sono ottenute ma considerandole come grafici, in un piano cartesiano, di equazioni del seguente tipo:

$$y^2 = a\,x - b\,x^2, \quad y^2 = a\,x, \quad y^2 = a\,x + b\,x^2.$$

7. Un altro passo era stato così fatto verso la moderna Geometria Analitica. Ma non tutto era ancora compiuto.

Per esempio, tutti i matematici che si erano occupati dell'argomento fino a quest'epoca non avevano fatto altro, in fin dei conti, che tradurre in linguaggio algebrico i risultati ottenuti quasi due millenni prima da Apollonio. Inoltre non erano ancora accettate le radici negative di un'equazione come soluzioni della stessa né tantomeno erano stati introdotti i valori negativi per le coordinate. Per la verità avevano già tenuto conto delle radici negative di un'equazione il milanese Gerolamo Cardano (1545) e i fiamminghi Simon Stevin (1585) e Albert Girard (1629), ma avevano ritegno a considerarle come vere e proprie soluzioni dell'equazione. Lo stesso Cartesio distingueva tra soluzioni "vere" (quelle positive) e "false" (negative).

Il merito di aver reso sistematica l'accettazione esplicita delle radici negative (e più in generale delle coordinate e dei numeri negativi) e di aver interpretato il loro significato geometrico va a **Isaac Newton** (1642-1727), sia in una serie di lezioni da lui tenute all'Università di Cambridge nel decennio che va dal 1673 al 1683 ma pubblicate nel 1707 in un volume dal titolo *Arithmetica universalis*, sia in uno studio sulle curve algebriche del 3° ordine, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, composto presumibilmente prima del 1676 ma pubblicato solo nel 1704 come appendice ad un trattato sull'ottica, dal titolo *Opticks*.

Lo stesso Newton, nella sua opera principale, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, pubblicata per la prima volta nel 1687, fa nel I libro una trattazione ampia delle proprietà delle coniche ma con metodi

---

[8] Il termine "coordinate" fu coniato da G. W. Leibniz (1646-1716).

quasi esclusivamente sintetici e pertanto non dissimili da quelli di Apollonio. Tuttavia, laddove egli lo trova conveniente, come per esempio nel II libro, non esita a servirsi di metodi analitici.

Un'opera però contribuì in modo decisivo a divulgare le nuove idee: il *Traité analytique des sections coniques*, pubblicato nel 1707 dopo la morte del suo autore, il francese **Guillome de L'Hôpital** (1661-1704). L'opera invero non aveva nulla di originale, ma era scritta in maniera chiara ed efficace e soprattutto continuava quel lavoro di emancipazione da Apollonio, avviato da Wallis, che avrebbe permesso un'applicazione della "geometria cartesiana" ad altri campi.

Quest'emancipazione fu completata in via definitiva dal matematico svizzero **Leonhard Euler** (1707-1783) con la pubblicazione della sua monumentale opera dal titolo *Introductio in analysin infinitorum* (1748).

Nell'opera, infatti, Eulero non tratta solo delle coniche come curve rappresentative di equazioni di 2° grado in due indeterminate ma espone una teoria generale delle curve, e non solo algebriche ma anche trascendenti, come, giusto per fornire qualche esempio, quelle delle seguenti equazioni:

$$y = \sin x \,,\ \ y = \cos x \,,\ \ y = \tan x \,,\ \ y = a^x \,.$$

L'*Introductio* ha contribuito più di ogni altro libro a diffondere l'uso sistematico delle coordinate nello studio delle curve e, trattando delle questioni di Geometria Analitica con un linguaggio ed una notazione assolutamente comprensibili, ha dato alla disciplina un assetto veramente moderno. Tuttavia, fatto alquanto curioso, non figura nell'opera uno studio particolare della retta e della circonferenza. Solo per questa ragione il libro, almeno per la parte che riguarda la Geometria Analitica, non può essere ancora considerato un vero e proprio manuale di Geometria Analitica come lo intendiamo noi.

I primi manuali elementari di Geometria Analitica, simili a quelli oggi in uso nelle scuole, compaiono in Francia allo scadere del Settecento e sono opera di un gruppo di giovani allievi del grande geometra **Gaspard Monge** (1746-1818) e direttamente ispirati dalle lezioni che egli teneva all'*École Polytechnique* di Parigi, scuola fondata durante il periodo della Rivoluzione francese. Tra di loro principalmente **Sylvestre François Lacroix** (1765-1843), **Jean Baptiste Biot** (9) (1774-1862) e **Louis Puissant** (1769-1843). I loro manuali, scritti in francese e pubblicati a partire dal 1798, ebbero grande successo, se ne fecero molte edizioni anche a distanza di decine di anni e vennero tradotti in altre lingue.

È esattamente nel manuale di Biot, edizione 1802, che compare per la prima volta nel titolo l'espressione "Geometria Analitica". Tale manuale è intitolato infatti *Essai de Géométrie Analytique* [2, pag. 273; 9, pag. 190]. Anche se, ad onore del vero, l'espressione "geometria analitica" girava già da qualche tempo e lo stesso Lacroix la utilizzava nei suoi manuali, ma non nel titolo.

8. Il primo manuale di Geometria Analitica, scritto in lingua italiana sul modello dei manuali di Lacroix e Biot, compare nel 1806 a Milano col titolo *Lezioni di Geometria Analitica a due coordinate* ed è opera del veneziano **Antonio Collalto** (1765-1820). Il manuale fu pubblicato mentre Collalto era professore di matematica nella R. Scuola d'Artiglieria e nella R. Scuola Militare di Pavia.

Nulla a che vedere con la nobile casata veneta dei Collalto, di origine longobarda, Antonio proveniva da una famiglia modesta.

Frequentò il seminario patriarcale di Venezia, dove completò i suoi studi, dedicandosi particolarmente a quelli della Matematica e della Fisica.

A partire dal 1795 insegnò Matematica e Fisica nelle scuole pubbliche di Venezia, ma, dopo essere stato, nel 1805, professore nella scuola militare di Pavia, dal 1806 diventò professore di *Introduzione al Calcolo sublime* (10) nella Regia Università di Padova, da dove fu cacciato via dal governo austriaco per le sue idee politiche. Nel 1815 diventò socio dell'Accademia Nazionale delle Scienze.

Antonio Collalto fu apprezzato autore di varie opere a contenuto matematico.

---

[9] È forse più famoso per la nota "legge di Biot e Savart" riguardante l'azione magnetica della corrente elettrica che fluisce in un filo rettilineo. Félix Savart (1791-1841), fu un medico e fisico francese.
[10] Il calcolo sublime altro non era che il calcolo infinitesimale.

Scrisse di lui Antonio Lombardi (1768-1847), matematico e primo bibliotecario di Sua Altezza Reale il Sig. Duca di Modena, nella sua *Storia della letteratura italiana nel secolo XVIII* (1827) [tomo I, pag. 520]:

« *Se la morte non avesse in buona età rapito l'anno 1820, Antonio Collalto Veneziano, l'Italia possederebbe un'opera interessante di cui essa manca, voglio dire la descrizione, il maneggio e l'uso dei principali strumenti di Matematica applicabili alle Scienze ed alle Arti con molti problemi utili e curiosi. Questo vasto lavoro era assai avanzato quando l'Autore dovette soccombere*. »

Ma, ritornando al contributo di Collalto alla Geometria Analitica, ritengo interessante riportare alcune sue parole, tratte a spezzoni dalla Prefazione all'opera succitata [4], che fanno capire meglio di quanto io non abbia fatto, qual era lo stato dell'arte quando Collalto se ne occupò. In queste parole, fra l'altro, egli riconosce di essersi ispirato alle opere di Lacroix e Biot e afferma di essere il primo ad aver diffuso in Italia il metodo dell'applicazione dell'algebra alla geometria, ovvero il metodo della Geometria Analitica.

Ecco dunque le sue parole:

« […] la nuova idea di Cartesio dell'applicazione dell'algebra alla geometria, grande e sublime idea, […] portando in tutte le matematiche una specie di rivoluzione […] ne ha totalmente cangiata la forma.[…]

« Newton fu il primo che [si servì] *della nuova scoperta per numerare le differenti specie di linee, che si potevano rappresentare con una sola equazione.*

« Eulero in progresso [applicò] *l'algebra alla geometria per dimostrare tutte le principali proprietà delle curve, […].*

« Si pubblicarono quindi differenti trattati sull'applicazione dell'algebra alla geometria, ma questi trattati non erano in fondo che un amalgama informe di metodi antichi coi moderni. Sembrava che non si avesse il coraggio di abbandonare interamente le antiche maniere di trattare la Geometria. […]

« Al nostro immortale Lagrange ed al celebre Monge era riserbata la gloria di dimostrare che si potevano trattare tutte le differenti quistioni geometriche; […]

« Lacroix è stato il primo che abbia trattato in modo elementare […] varie quistioni diedro agli ultimi metodi generali. […]

« Biot ha pubblicato in progresso una bell'opera sulle linee […] di secondo ordine; […]

« Camminando io pure sulle stesse luminose tracce di Lagrange e di Monge, ho profittato all'uopo dei varj lumi somministratimi dai suddetti Lacroix e Biot. […]

« Sarò abbastanza contento, se diffondendo io il primo in Italia questi nuovi metodi, li vedrò col mio mezzo coltivati e trattati anche nelle nostre Scuole. »

BIBLIOGRAFIA.

[1] Eric T. BELL, *I grandi matematici*, Firenze, Sansoni, 1966.

[2] Carl B. BOYER, *Hystory of Analytic Geometry*, Mineola, New York, Dover Publications, Inc., 1956.

[3] ID., *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1976.

[4] Antonio COLLALTO, *Lezioni di Geometria Analitica a due coordinate*, Milano, Tipografia Destefanis, 1806.

[5] René DESCARTES, *Opere 1637-1649*, Milano, Bompiani, 2009.

[6] Antonino GIAMBO', *Coniche*, in Periodico di matematiche, Organo Nazionale della Mathesis, N° 2, Mag-Ago 2018.

[7] Antonino GIAMBO' – Roberto GIAMBO', *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.

[8] Isaac NEWTON, *Principi matematici della filosofia naturale*, Torino, UTET, 1965.

[9] Dirk J. STRUIK, *Matematica: un profilo storico*, con un'appendice di Umberto Bottazzini, Bologna, Il Mulino, 1981.