Tema: Breve storia dell'Analisi Matematica

di Antonino Giambò

1. L'***Analisi Matematica***, altrimenti detta ***Analisi*** (o ***Calcolo***) ***Infinitesimale***, trae origine da due problemi:

- il **problema delle aree e dei volumi**, vale a dire il problema delle misure dell'area limitata da una linea chiusa non poligonale e del volume di un solido non a forma di prisma; risale agli antichi Greci;
- il **problema delle tangenti**, cioè il problema della costruzione della retta tangente ad una data curva in suo punto; anch'esso risale agli antichi Greci, ma si presenta in una nuova veste nel XVII secolo.

Il primo problema ha condotto a quella parte dell'Analisi che è chiamata ***Calcolo Integrale***, il secondo a quella parte denominata ***Calcolo Differenziale***.

Questi problemi non si riusciva a risolverli con i metodi tradizionali, ché erano basati esclusivamente sulla Geometria e sull'Algebra. Bisognava inventare nuove strade.

Ebbene, non solo queste strade furono escogitate, ma i due problemi, che in principio sembravano non avere nulla in comune, si rivelarono invece come l'uno l'inverso dell'altro. La scoperta di questo fatto fu uno dei risultati più prolifici in campo matematico e il merito principale di ciò va attribuito a Newton e Leibniz, che legittimamente sono considerati i creatori del Calcolo Infinitesimale. Questa creazione, però, non fu un parto improvviso, ma avvenne dopo una serie di contributi provenienti da una nutrita schiera di studiosi.

2. Il problema delle aree e dei volumi ebbe come massimo interprete il più grande scienziato dell'antichità, il siracusano **Archimede** (287 ca. - 212 a.C.). Egli, applicando un metodo elaborato da **Eudosso** di Cnido (circa 408 - 355 a.C.) e che dal XVII secolo in poi sarebbe stato chiamato ***metodo di esaustione*** [1], dimostrò molte formule di aree di superfici a contorno curvilineo (come il cerchio e l'ellisse) o mistilineo (come il segmento parabolico) e di volumi di solidi diversi dal prisma (piramide, sfera, paraboloide). Tutti risultati così importanti da far ritenere giustamente Archimede come colui che anticipò di 2.000 anni il Calcolo Integrale.

Eudosso introdusse il suo metodo al fine di evitare nelle dimostrazioni l'uso diretto dell'infinito e dell'infinitamente piccolo: uso che era ritenuto "illegale" nei ragionamenti matematici. Vediamo di capirne l'essenza.

IL METODO DI ESAUSTIONE.

Si debba dimostrare che due grandezze omogenee A e B sono uguali.

Ragionando per assurdo, si suppone $A>B$. Sia poi possibile costruire in qualche modo una successione di grandezze G_1, G_2, G_3, … omogenee ad A e B tale che:

- la successione sia infinita;
- tutti i suoi termini siano minori di A e di B;
- esista una grandezza G della successione in modo che si abbia $A-G<\varepsilon$, comunque piccola sia scelta la grandezza ε omogenea a quelle in esame.

Allora, posto $A-B=\varepsilon$, per la terza delle precedenti condizioni esiste una grandezza G della successione tale che $A-G<\varepsilon$; per questo $A-G<A-B$, da cui $G>B$. Perciò $A>G>B$, contro la seconda delle tre condizioni suddette. Quindi non può essere $A>B$.

Analogamente si esclude che possa essere $B>A$. Resta l'unica possibilità $A=B$.

Euclide utilizza il metodo di Eudosso negli *Elementi*, per dimostrare la proposizione 2 del libro XII:

I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri.

La proposizione che la precede (prop. 1) recita:

Poligoni simili inscritti in cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri.

---

[1] Il matematico fiammingo Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) usò per la prima volta la denominazione "metodo di esaustione" nel 1647 in un'opera sulla quadratura del cerchio e delle sezioni coniche. Esattamente l'opera, in due volumi, ha per titolo *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*. E gli storici (in particolare: Bell, Boyer, Frajese, Struik) concordano sul fatto che la denominazione si riferisca al metodo di Eudosso.

Da questa proposizione Euclide avrebbe potuto ricavare immediatamente la proposizione 2: bastava considerare i cerchi come poligoni di infiniti lati infinitamente piccoli. Ma così avrebbe fatto un uso diretto proprio dell'infinito e dell'infinitamente piccolo e questo era proibito dalla scienza ufficiale. Ricorse allora al metodo di Eudosso. Era la prima volta che lo faceva, ma altre ce ne sarebbero state nello stesso libro XII e riguardano, tra l'altro, i volumi di piramide (prop. 7), cono (prop. 10) e sfera (prop. 18).

Vediamo in modo molto stringato, giusto per dare un'idea, come Euclide dimostra la prop. XII, 2 ricorrendo per l'appunto al metodo di Eudosso.

Siano allora i cerchi di aree C e C' e di diametri d e d'. Si deve dimostrare che:

$$C : C' = d^2 : d'^2.$$

Se questa proporzione non fosse vera allora esisterebbe un'area S maggiore o minore di C' tale che:

$$d^2 : d'^2 = C : S.$$

Euclide, attraverso la costruzione di poligoni idonei, ottenuti raddoppiando via via il numero dei lati del quadrato inscritto nel cerchio, dimostra che non può essere $S>C'$ né $S<C'$. Deve essere perciò $S=C'$.

Come si può costatare, il metodo di Eudosso ha un limite: per dimostrare un certo risultato occorre già conoscerlo o, perlomeno, ipotizzarlo. Cosa che ammette lo stesso Archimede. Infatti, nella lettera indirizzata al matematico, astronomo e amico Eratostene di Cirene, che fa da premessa all'opera *Il metodo sui teoremi meccanici* (più nota come *Il metodo*), si legge [4, pag. 276]:

«[…] ho creduto bene esporti e dichiarare […] le particolarità di un metodo, mediante il quale ti sarà possibile acquistare una certa facilità di trattare cose matematiche per mezzo di considerazioni meccaniche. Sono persuaso, del resto, che questo metodo sarà non meno utile anche per la dimostrazione degli stessi teoremi. Infatti, anche a me alcune cose si manifestarono prima per via meccanica, e poi le dimostrai geometricamente; perché la ricerca fatta con questo metodo non importa una vera dimostrazione. Però è certamente più facile, dopo avere con tale metodo acquistato una certa cognizione delle questioni, trovarne la dimostrazione, anziché cercarla senza averne alcuna cognizione preliminare.»

Archimede, dunque, applicava il metodo di Eudosso sistematicamente ma faceva precedere la dimostrazione dalla ricerca del risultato con un metodo meccanico di sua invenzione. Egli, detto in parole povere, immagina una superficie piana come composta di tanti segmenti di rette parallele che la riempiono tutta e, del pari, considera un solido come composto di tante superfici piane che lo riempiono tutto. Una superficie (o un volume) è così considerato, diremmo noi, come la "somma di infiniti elementi infinitamente piccoli". Proprio ciò che la matematica ufficiale dell'epoca giudicava "illegale". Ma è anche l'idea base del calcolo integrale che, pur senza conoscerla, i matematici del Rinascimento faranno propria.

Occorre precisare che la scoperta del *Metodo* è relativamente recente, giacché avvenuta solo nel 1906 in una biblioteca di Costantinopoli ad opera del filologo danese Johan Ludvig Heiberg (1854-1928). Questo per significare che gli studiosi del Seicento, che pure conoscevano la massima parte dei risultati di Archimede, non ne conoscevano il metodo di analisi, anche se erano consapevoli che egli ne avesse uno. Ad ogni modo questi studiosi, piuttosto che indovinare il metodo dello scienziato siracusano, ne ricercarono di nuovi. In quest'opera si distinsero particolarmente **Galileo Galilei** (1564-1642), **Johann Kepler** (1571-1630), **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647) ed **Evangelista Torricelli** (1608-1647). Questi studiosi, senza curarsi delle sottigliezze logiche del metodo di Eudosso, affrontarono senza remore e con disinvoltura gli infiniti e gli infinitamente piccoli, gettando le basi per la creazione del Calcolo Infinitesimale.

Uno di essi, il bolognese **Pietro Mengoli** (1625-1686), pubblicò nel 1659 un'opera dal titolo *Geometriae speciosae elementa*, nella quale definì addirittura i concetti di limite, di infinito e di infinitesimo e fornì una condizione di integrazione per speciali funzioni continue. I suoi risultati però ebbero influenza zero sul progresso della disciplina e lo stesso Mengoli non è quasi mai citato nemmeno fra i precursori del Calcolo. Questo perché il suo lavoro cadde subito nel dimenticatoio, soprattutto perché scritto in un linguaggio di difficile comprensione, e riscoperto solo nei primi anni del Novecento, quando il problema dei fondamenti dell'Analisi era stato risolto.

Prima di proseguire mi corre l'obbligo di fare una precisazione importante: molti autori chiamano "metodo di esaustione" un procedimento diverso da quello ideato da Eudosso. Qualcosa di simile al procedimento che vado a descrivere per determinare l'area sotto un arco di parabola.

Sia allora una parabola p, assegnata in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) in modo che l'origine O coincida col vertice V, l'asse y coincida con l'asse di simmetria della parabola e l'orientamento degli assi sia tale che p sia situata nel semipiano $y \geq 0$ (figura 1). Ci proponiamo di calcolare l'area S sotto l'arco VA della parabola, vale a dire l'area del triangolo mistilineo VPA.

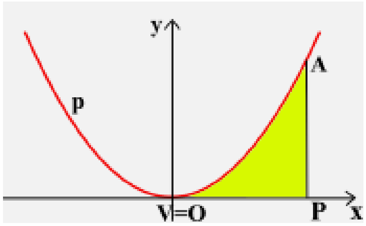

figura 1

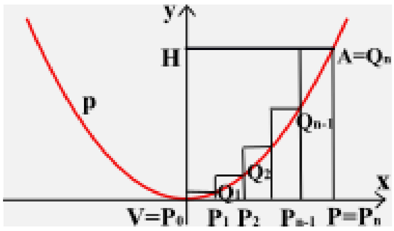

figura 2

L'equazione della parabola è del tipo $y=ax^2$, con $a>0$. Anzi (fig. 2), siccome per $x=\overline{AH}$ risulta $y=\overline{VH}$, si trova:

$$a = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} .$$

Perciò la parabola ha equazione:

$$y = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2}\, x^2 .$$

Dividiamo il segmento VP in n parti uguali per mezzo dei punti: $V=P_0$, P_1, P_2, … , P_{n-1}, $P_n=P$. Chiamati Q_0, Q_1, Q_2, … , Q_{n-1}, Q_n i punti in cui le parallele all'asse y condotte ordinatamente per P_0, P_1, P_2, …, P_{n-1}, P_n intersecano la parabola, consideriamo quest'area:

$$S_n = \overline{P_0P_1} \cdot \overline{P_1Q_1} + \overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_2Q_2} + \ldots + \overline{P_{n-1}P_n} \cdot \overline{P_nQ_n}$$

vale a dire la somma di n rettangoli aventi basi di lunghezza uguale ad $\overline{AH}/n$ ed altezze nell'ordine:

$$\overline{P_1Q_1} = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} \cdot \overline{P_0P_1} = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} \cdot \left(1 \cdot \frac{\overline{AH}}{n}\right)^2 = \overline{VH} \cdot \frac{1^2}{n^2} ,$$

$$\overline{P_2Q_2} = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} \cdot \overline{P_0P_2} = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} \cdot \left(2 \cdot \frac{\overline{AH}}{n}\right)^2 = \overline{VH} \cdot \frac{2^2}{n^2} ,$$

…………………………………………… ;

$$\overline{P_nQ_n} = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} \cdot \overline{P_0P_n} = \frac{\overline{VH}}{\overline{AH}^2} \cdot \left(n \cdot \frac{\overline{AH}}{n}\right)^2 = \overline{VH} \cdot \frac{n^2}{n^2} .$$

Pertanto: $S_n = \frac{\overline{AH}}{n} \cdot \overline{VH} \cdot \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \ldots + \frac{n^2}{n^2}\right)$, ossia: $S_n = \overline{AH} \cdot \overline{VH} \cdot \left(\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\right)$.

Il limite di S_n (quando $n \to +\infty$) è l'area S. Dunque, sapendo che è 1/3 il limite della frazione in parentesi:

$$S = \frac{1}{3} \cdot \overline{AH} \cdot \overline{VH} .$$

Questo procedimento, a differenza del metodo di Eudosso, consente di "scoprire" risultati e, se non si corresse il rischio di creare confusione, non avrei nulla da eccepire a chiamarlo "metodo di esaustione". A condizione però che sia chiaro che questo non è il metodo di Eudosso, che non permette invece di scoprire alcun risultato ma solo di dimostrare che una congettura è vera con una riduzione all'assurdo. Ma una congettura deve esserci, altrimenti il metodo è inefficace.

3. L'altro problema che portò al Calcolo Infinitesimale, più precisamente al Calcolo Differenziale, fu il "problema della tangenti".

In realtà, riguardo alla risoluzione di questo problema abbiamo esempi che risalgono agli antichi Greci: Euclide (circonferenza), Archimede (spirale), Apollonio (conica). Ma i procedimenti seguiti da quei geometri, di tipo non infinitesimale, non consentirono progressi in questo campo e, di fatto, progressi non ce ne furono fino al XVII secolo, quando la creazione della Geometria Analitica e l'affermarsi del calcolo simbolico (2) diedero un deciso impulso alla risoluzione del problema.

Il primo studioso che affrontò la questione con procedimenti infinitesimali fu il francese **Pierre de Fermat** (1601-1665), che per questo può essere considerato il vero creatore del Calcolo Differenziale o quantomeno un autorevole anticipatore di esso.

Vediamo in cosa consiste il metodo di Fermat, servendoci però di un linguaggio a noi familiare. Sia $P(a,f(a))$ il punto della curva γ di equazione $y=f(x)$, nel quale si vuole tracciare la tangente t a γ (figura 3). Si prende un punto Q di γ di coordinate $x_Q=a+E$, $y_Q=f(a+E)$. Se Q è "infinitamente vicino" a P, i due triangoli RP'P ed RQ'Q si possono ritenere simili, per cui: $\frac{QQ'}{PP'}=\frac{Q'R}{P'R}$. Ora, posto P'R=b, la precedente relazione diventa:

$$\frac{f(a+E)}{f(a)}=\frac{b+E}{b}\ .$$

Per tracciare la tangente a γ in P è allora sufficiente individuare la posizione di R, che è come dire calcolare b. Per questo, nella precedente relazione, dopo aver semplificato e diviso per E, Fermat pone E=0 e ricava b.

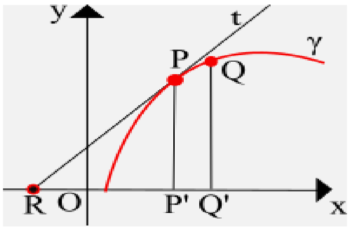

figura 3

Chiariamo, prendendo l'esempio della curva di equazione $y=x^3$. Adesso la relazione di Fermat è la seguente:

$$\frac{(a+E)^3}{a^3}=\frac{b+E}{b}\ .$$

Da essa, dopo elementari operazioni di semplificazione, si trova dapprima (<u>dopo aver diviso tutto per E</u>):

$$3a^2b+3abE+bE^2=a^3.$$

E poi (<u>dopo aver posto E=0</u>): $3a^2b=a^3$, da cui si ricava $b=a/3$.

Osserviamo che la relazione di Fermat può essere scritta nella seguente forma equivalente:

$$\frac{f(a+E)-f(a)}{E}=\frac{f(a)}{b}$$

dove $f(a)/b$ altro non è che la pendenza m della retta t tangente a γ in P.

Ne possiamo desumere che tale pendenza è il valore dell'espressione $\frac{f(a+E)-f(a)}{E}$ quando E è "infinitamente piccolo", vale a dire, in termini a noi familiari, ma che erano sconosciuti a Fermat:

$$m=\lim_{E\to 0}\frac{f(a+E)-f(a)}{E}\ .$$

Si tratta, se si vuole, del **primo esempio della storia di derivata di una funzione**, anche se per la definizione corretta di "derivata", basata sul concetto di limite, bisogna aspettare Cauchy, quasi 2 secoli dopo.

Ma Fermat non possedeva il concetto di limite ed era costretto perciò a seguire un ragionamento che, in realtà, difettava sul piano del rigore matematico: che cos'era, infatti, quella quantità "E" che prima, quando si divide per essa, non può essere "zero" (altrimenti la divisione non sarebbe possibile) e poi si pone, invece, proprio uguale a "zero"?

I risultati ottenuti da Fermat – anche se non furono pubblicati in forma ufficiale (3) – circolarono negli ambienti matematici mentre Fermat era in vita e sembra che Newton ne sia venuto a conoscenza. Del resto due

---

[2] Il calcolo simbolico che si affermò fu opera essenzialmente di Cartesio (1637).

[3] Le opere di Fermat furono pubblicate nel 1679, dopo la sua morte, dal figlio Samuele col titolo *Varia opera mathematica*.

altri scienziati dell'epoca – l'olandese **Christian Huygens** (1629-1695) e lo scozzese **James Gregory** (1638-1675) – i quali avrebbero influenzato l'opera di Newton, si servirono del metodo di Fermat.

Un altro matematico di quel periodo aveva ideato un metodo che non differiva sostanzialmente da quello di Fermat e che da lui, benché non direttamente, sembra abbia mutuato: si tratta di **Isaac Barrow** (1630-1677), professore di matematica a Cambridge, dove frequentò le sue lezioni l'allievo Isaac Newton, che gli sarebbe succeduto in quella cattedra a partire dal 1669.

Oltre Barrow, un altro inglese, **John Wallis** (1616-1703), professore all'Università di Oxford, esercitò una profonda influenza sulla formazione matematica di Newton. Non direttamente, per la verità, ma tramite una sua opera, l'*Arithmetica infinitorum*, pubblicata nel 1655. In tale opera Wallis si serve, per i suoi ragionamenti, del fatto (inammissibile ai tempi nostri) che la quantità $1/n$ sia uguale a 0 quando n è infinito e scriveva senza alcuno scrupolo: $1/\infty=0$ (il simbolo dell'infinito, l'otto coricato ∞, è introdotto proprio da lui).

I risultati ottenuti dagli studiosi sopraccitati, ma sui quali non mi soffermo, sono solo alcune delle scoperte che si erano via via accumulate prima che Newton e Leibniz iniziassero le loro ricerche, che poi li portarono a creare il Calcolo Infinitesimale. Altri risultati, più o meno importanti, erano stati ottenuti da altri studiosi, fra i quali mi limito a segnalare lo scienziato e filosofo francese **Blaise Pascal** (1623-1662).

4. Riassumendo quanto esposto fin qui, possiamo dunque concludere che nella seconda metà del Seicento erano noti agli studiosi, non solo i metodi geometrici di quadratura e cubatura di Archimede, Cavalieri e Torricelli, ma anche i metodi algebrici d'indagine di Cartesio e dei suoi seguaci ed era noto il metodo di Fermat di costruire la tangente ad una curva di data equazione in un suo punto. Era nota, poi, tutta una serie di risultati, alcuni molto significativi, ottenuti col contributo di una vera e propria schiera di scienziati, grandi e piccoli.

I tempi erano maturi perché fosse compiuto l'ultimo passo. Occorreva solo una mente che, padroneggiando i metodi suddetti, organizzasse in una disciplina autonoma le idee di quell'epoca, fortemente innovatrici, ma ancora in sospensione.

Di ingegni di tale forza ve ne furono due in quel periodo: l'inglese **Isaac Newton** (1642-1727) e il tedesco **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716). Entrambi crearono il Calcolo Infinitesimale, l'uno indipendentemente dall'altro. Newton lo scoprì per primo ma spetta a Leibniz il merito della priorità nella pubblicazione.

- La prima esposizione del *Calcolo Infinitesimale* viene data da Newton in un'opera dal titolo *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, composta nel 1669 ma pubblicata solo nel 1711. L'opera comunque circolò manoscritta fin dalla sua stesura. La prima esposizione del *Calcolo* pubblicata ufficialmente ma non in forma sistematica apparve invece nel 1687 con la prima edizione dell'opera principale di Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Una terza esposizione dei metodi newtoniani del *Calcolo Infinitesimale* si ha in un'opera dal titolo *De quadratura curvarum*, che comparve nel 1704 come appendice ad un trattato sull'ottica, intitolato *Opticks*. Un'altra opera sul medesimo tema, dal titolo *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, fu composta nel 1671 ma fu stampata postuma nel 1736.

- Sembra che Leibniz abbia maturato le proprie idee sul calcolo infinitesimale tra il 1673 e il 1676 in seguito alla lettura dei lavori di Pascal. Egli comunque pubblicò i suoi risultati sul Calcolo Differenziale nel 1684 in un articolo dal titolo chilometrico ma di sole sei pagine, che la dice lunga su quelle che erano le conoscenze dell'epoca: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quas nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* [(4)]. Il lavoro fu pubblicato sulla rivista *Acta Eruditorum*, un periodico matematico fondato con il contributo dello stesso Leibniz due anni prima. E sempre sulla stessa rivista pubblicò nel 1686 i risultati conseguiti sul Calcolo Integrale, in un articolo dal titolo *De Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum.*

A questo punto è il caso di chiarire perché Newton e Leibniz sono considerati i creatori del *Calcolo Infinitesimale*, considerato che prima di loro differenziazioni e integrazioni erano fatte con una certa frequenza.

---

[4] *Nuovo metodo per i massimi e i minimi come pure per le tangenti, che non si arresta di fronte a quantità frazionarie e irrazionali, e un singolare genere di calcolo per quei problemi*

Questo è certamente vero. Il fatto è, però, che **non vi erano regole generali, per cui ogni problema era una questione a se stante e la sua risoluzione comportava difficoltà considerevoli, talvolta insuperabili**. Anche per questa ragione le funzioni che venivano indagate al fine di calcolarne la derivata con il metodo di Fermat erano funzioni algebriche particolarmente semplici, dal momento che quelle più complicate e ancor più quelle trascendenti erano di fatto intrattabili. Si ricordi il titolo dell'opera di Leibniz sull'argomento.

Newton e Leibniz, pur nella diversità dei loro metodi, non solo trovarono dei criteri e delle regole generali di differenziazione, ma mostrarono pure che quelle regole possono essere applicate a tutte le funzioni, comprese le funzioni razionali, irrazionali e trascendenti. E così:

Dopo Newton e Leibniz il calcolo della derivata di una qualunque funzione è ricondotto a quello di poche derivate fondamentali, mediante il ricorso ad alcune "regole di calcolo".

Ma i due grandi scienziati fecero di più. Prima di loro, **calcolare un integrale comportava una serie di operazioni complicate**, che spesso mettevano in seria difficoltà gli studiosi che si cimentavano nell'impresa e non di rado si trattava di matematici navigati. Noi sintetizziamo tali operazioni nell'espressione seguente, di cui abbiamo visto un esempio non molto dissimile a conclusione del precedente paragrafo 2:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i\,.$$

Newton e Leibniz, l'uno separatamente dall'altro e con metodi diversi, dimostrarono che l'integrazione e la differenziazione sono operazioni inverse. Per questo:

Il calcolo di un integrale è ricondotto, dopo Newton e Leibniz, alla ricerca di una primitiva della funzione da integrare.

Per la verità alcuni attribuiscono a Torricelli e Barrow la scoperta di questa fondamentale proprietà dell'Analisi Matematica, poiché sembra che questi due scienziati fossero consapevoli della relazione inversa che lega i due problemi, perlomeno con riferimento a qualche specifica situazione. Ora, è certo che né Torricelli né Barrow enunciarono esplicitamente la proposizione in nessuna delle loro opere. Ma secondo critici autorevoli (in particolare, Derek Thomas Whiteside, storico britannico della Matematica, 1932-2008) è pure improbabile che essi abbiano potuto solo intuire la fondamentale proprietà d'inversione, legati com'erano alla concezione tradizionale della tangente ad una curva in un suo punto. E ciò, nonostante Barrow avesse ideato un metodo della tangente molto simile a quello di Fermat.

Ad ogni modo i primi a dimostrare il legame inverso fra il problema dell'integrazione e quello della differenziazione furono Newton e Leibniz. In effetti, il cosiddetto *teorema fondamentale del calcolo integrale*, ossia – posto che F(x) sia una primitiva di f(x) – quello espresso con formula:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)\,,$$

che alcuni *denominano teorema di Torricelli-Barrow*, è più spesso chiamato *teorema di Newton-Leibniz*.

5. Senza indugiare sulla polemica circa la priorità della scoperta, sollevata dai "tifosi" di Newton contro Leibniz e che finì inevitabilmente per coinvolgere i due scienziati, rilevo con Eric T. Bell [1, pag. 115] che quella polemica un risultato certamente lo ottenne: gli Inglesi, tutti presi dalla passione sportiva che li portava a desiderare ardentemente di vedere trionfare il loro campione, non si curarono di sviluppare e soprattutto migliorare le idee di Newton, con la conseguenza che nel loro Paese la Matematica dopo Newton ristagnò per circa un secolo. Invece nel continente i seguaci di Leibniz e tra essi principalmente i due fratelli svizzeri **Jakob** (1654-1705) e **Johann** (1667-1748) **Bernoulli**, ma non solo, volgarizzando le idee e i metodi del maestro fecero del Calcolo Infinitesimale uno strumento di ricerca estremamente potente, il più formidabile strumento di calcolo mai creato dall'uomo.

Probabilmente le ragioni che favorirono lo svilupparsi del metodo leibniziano anziché di quello newtoniano, che in fondo erano assai diversi, sono anche altre. Per esempio, Newton era piuttosto riluttante a divulgare le proprie idee che spesso non comunicava neppure ai suoi collaboratori, mentre Leibniz era impaziente di trasmettere ad altri le sue scoperte. Ma soprattutto la notazione di Leibniz era più efficace e maneggevole di quella di Newton.

Comunque sia, la moderna Analisi Matematica discende dalla concezione di Leibniz. Suoi sono, tra l'altro, i termini *calculus differentialis* e *calculus integralis*, il modo di indicare con dx e $\frac{dy}{dx}$ rispettivamente il differenziale di x e la derivata di y rispetto ad x e inoltre l'uso della esse allungata $\int$ per il simbolo dell'integrale.

Fu dunque il metodo di calcolo leibniziano che s'impose e ciò avvenne principalmente per merito dei fratelli Jakob e Johann Bernoulli attraverso una serie di articoli pubblicati su riviste matematiche e specialmente sugli *Acta Eruditorum*.

Fu poi un allievo di Johann, il marchese **Guillome de L'Hôpital** (1661-1704), che pubblicò a Parigi nel 1696 quello che può essere considerato il primo manuale di Calcolo Differenziale: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*.

In realtà, il contenuto dell'opera di de L'Hôpital non è farina del suo sacco, o non lo è completamente, ma è per lo più il risultato dell'ingegno di Johann Bernoulli. Questi, infatti, firmò un contratto con il quale si impegnava a comunicare al marchese, diedro compenso, tutte le sue scoperte matematiche, lasciandolo libero di farne l'uso desiderato [(5)]. Il risultato fu per l'appunto la pubblicazione dell'*Analyse* [2, pag. 483], che, avendo avuto successo, suscitò la gelosia di Bernoulli e la sua accusa di plagio.

Al di là di questa storia poco edificante un fatto è certo: l'opera, scritta in maniera scorrevole ed efficace, evidenziò le buone capacità comunicative di de L'Hôpital, che peraltro si era dimostrato un matematico capace, e costituì un buon veicolo per la volgarizzazione dell'Analisi. Il celebre "teorema di de L'Hôpital", che in realtà è una scoperta di Johann Bernoulli, è presente in quest'opera.

Contribuì pure, e in misura rilevante, allo sviluppo dell'analisi di Leibniz lo svizzero **Leonhard Euler** (1707-1783) con due opere che somigliano molto ai nostri manuali elementari di analisi: il trattato *Institutiones calculi differentialis* (1755) e i tre volumi delle *Institutiones calculi integralis* (1768-1774).

6. Per merito di questi matematici i metodi leibniziani furono volgarizzati, si diffusero e si affermarono piuttosto rapidamente. Ma, nonostante tutto, rimaneva alla base della teoria il solito punto oscuro, che suscitava le aspre critiche dei detrattori del Calcolo Infinitesimale: cos'è quell'incremento "infinitamente piccolo" su cui poggia tutta la disciplina e che ora è zero e ora non lo è ?

Oppure, detto nei termini sarcastici in cui si esprimeva uno dei principali critici del Calcolo Infinitesimale, pur riconoscendone l'utilità, il vescovo anglicano George Berkeley (1685-1753), filosofo britannico, rappresentante tra i più importanti dell'empirismo, in un opuscolo dal titolo *The Anayist; or a Discourse addressed to Infidel Mathematician* (*L'analista, ovvero un discorso rivolto al matematico infedele*, 1734):

«*E cosa sono questi incrementi evanescenti? Essi non sono né quantità finite, né quantità infinitesime, e tuttavia non sono un nulla. Perché non chiamarle spiriti di quantità sparite*?» [2, pag. 495]

La questione rimase in sospeso a lungo, ben oltre un secolo, e fu continuamente oggetto di riflessione da parte dei matematici, i quali si trovavano sempre di fronte al solito dilemma: o un infinitesimo è zero, e allora il Calcolo Infinitesimale è basato su un'operazione che non esiste (appunto la divisione per zero), o non lo è, e allora è un metodo di approssimazione. Quello che appariva davvero sorprendente era tuttavia il fatto che permettesse di giungere a risultati rigorosamente esatti. Il matematico italo-francese **Giuseppe Luigi Lagrange** (1736-1813), che pure ebbe un ruolo di primo piano nella diffusione del Calcolo, attribuiva addirittura questa evenienza alla bontà dell'Onnipotente. È illuminante, al riguardo, un suo pensiero:

Tale scienza formicola invero di contraddizioni, e se, malgrado ciò, ha condotto a grandi risultati, questo dipende solo dall'infinita clemenza di Dio, il quale dispose che i suoi errori [della scienza] *si compensassero l'un l'altro*. [7, pag. 12]

Neppure il grande Eulero superò l'ostacolo. Tant'è vero che definiva gli infinitesimi come quantità assolutamente nulle che però devono essere distinte fra loro quando si considerano i loro rapporti reciproci (!?).

---

[5] In realtà, Johann conservava copia manoscritta dei lavori che inviava al marchese.

Questo, in tempi più recenti, il commento di Friedrich Waismann (1896-1959), matematico, logico e membro fra i più attivi del Circolo di Vienna [7, pag. 12]:

Nessuna meraviglia se questo calcolo parve qualcosa di inconcepibile, quasi di mistico, un'arte più che una scienza, suggerita dall'ispirazione, ma non accessibile al pensiero logico. Questa concezione finì anzi per passare nei trattati comuni. Così, per esempio, si legge [...] che il calcolo differenziale è un operare mistico con quantità infinitamente piccole; il differenziale è un soffio, un nulla; e poi segue una citazione inglese [verosimilmente di Berkeley]: "Il differenziale è lo spirito di una grandezza svanita".

7. Ogni discussione sulle contraddizioni presenti alla base del Calcolo cessò dopo che il matematico francese **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) diede alla materia un assetto non molto dissimile da quello odierno con la pubblicazione di tre opere: *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1822), *Leçons sur le calcul différential* (1829). In esse Cauchy:

- fornì una definizione di limite, utilizzando un'idea di d'Alembert [6], e definì l'infinitesimo come una variabile numerica che ha per limite zero;
- definì la derivata di una funzione come limite del rapporto incrementale (sono sue le notazioni $\frac{\Delta y}{\Delta x}, y', f'(x)$) e definì il differenziale di una funzione;
- fornì la definizione di funzione continua e dimostrò che a) una funzione derivabile in un punto è ivi continua e b) che una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è ivi integrabile.

Insomma Cauchy incominciò a dare al Calcolo Infinitesimale quel fondamento logico di cui necessitava, anche se la sua definizione di limite, sulla quale il Calcolo è basato, non era ancora una definizione rigorosa.

Altri studiosi avrebbero continuato la sua opera e, fra questi, i due matematici che più d'ogni altro avrebbero contribuito a dotare l'Analisi Matematica di una base rigorosamente logica: il ceco **Bernhard Bolzano** (1781-1848) ed il tedesco **Karl Weierstrass** (1815-1897).

La definizione rigorosa di limite di una funzione, che è anche quella che al giorno d'oggi è utilizzata, è la cosiddetta definizione ε-δ, una definizione leggermente modificata rispetto a quella formulata da Weierstrass.

Questa definizione è, però, sempre più spesso sostituita da una definizione topologica proposta nel 1922 dal matematico statunitense **Eliakim Hastings Moore** (1862-1932).

Sono certamente note a chi legge sia la definizione ε-δ, sia la definizione topologica di limite. Forse non è ugualmente conosciuta la definizione di Cauchy. Ad ogni buon conto, anche per dare l'idea di come si sia evoluto nel tempo il concetto di limite, mi soffermo brevemente sulle tre definizioni.

- Incomincio con quella di Cauchy.

Quando i valori successivi attribuiti a una variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato così che finiscono con il differire da questo per una differenza piccola quanto si vuole quest'ultimo viene detto il limite di tutti gli altri. [2, pag. 596]

Si capisce che si tratta di una definizione non propriamente rigorosa: espressioni come "valori successivi", "si avvicinano indefinitamente", "piccola quanto si vuole", dicono già molto e sul piano didattico sono spesso usati dagli insegnanti, ma vanno meglio precisati se si vuole una definizione rigorosa.

- Passo quindi alla definizione ε-δ, denominata a volte definizione algebrica o definizione metrica.

Sia f(x) una funzione reale di variabile reale e sia α un suo punto di accumulazione. Se, per ogni $\varepsilon>0$, esiste $\delta>0$ tale che per $0<|x-\alpha|<\delta$ avviene che $|f(x)-\lambda|<\varepsilon$, allora si dice che f(x) ha per limite λ quando x tende ad α.

In simboli:

$$f(x)\to\lambda \text{ per } x\to\alpha \text{ se } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-\alpha|<\delta \to |f(x)-\lambda|<\varepsilon.$$

Questa definizione vale quando sia α sia λ sono numeri reali (nr), insomma nel caso cosiddetto finito. Se, però, almeno uno di tali valori è $+\infty$ o $-\infty$, la definizione va adattata alla nuova situazione. Ne consegue che, in realtà, non c'è una sola definizione di limite, ma ce ne sono tante quante le disposizioni dei tre simboli $(\text{nr}, +\infty, -\infty)$ a 2 a 2, cioè $3^2=9$ definizioni.

[6] Jean-Baptiste Le Rond (detto d'Alembert), scienziato ed enciclopedista francese, 1717-1783.

- Occupiamoci infine della definizione topologica, denominata anche definizione insiemistica.

Premettiamo che si definisce **intorno di α** e si indica con **U(α)**, o anche con **I(α)**, ogni insieme di numeri reali x, per i quali si ha:

- $\alpha-\delta<x<\alpha+\delta$, se α è un numero reale (δ è un numero reale positivo);
- $x>\mu$, se $\alpha=+\infty$ (μ è un numero reale qualsiasi);
- $x<\mu$, se $\alpha=-\infty$ (μ è un numero reale qualsiasi).

Sia ora f(x) una funzione reale di variabile reale e siano $\operatorname{dom} f(x)$ il suo dominio ed α un suo punto di accumulazione. Poniamo $D=\operatorname{dom} f(x)-\{\alpha\}$. Ebbene, si dice che f(x) ha per limite λ quando x tende ad α, se per ogni intorno U(λ) esiste un intorno U(α) tale che per ogni $x\in(U(\alpha)\cap D)$ avviene che $f(x)\in U(\lambda)$.

In simboli:

$$f(x)\to\lambda \text{ per } x\to\alpha \text{ se } \forall U(\lambda)\ \exists U(\alpha): x\in(U(\alpha)\cap D) \to f(x)\in U(\lambda).$$

Questa definizione è valida per ogni valore, finito o infinito, di α e di λ. E ammette, come casi particolari, tutti e 9 i casi previsti dalla definizione ε-δ.

8. Un'ultima riflessione per concludere. La diffusione del Calcolo Infinitesimale in Italia avvenne in varie fasi e fu opera di diversi studiosi. Ne segnalo un paio: uno che tratta l'argomento non ancora emendato del solito punto oscuro, l'altro successivo all'assetto proposto da Cauchy.

- Il primo di essi è **Vincenzo Brunacci** (1768-1818), professore di Algebra nell'Università di Pisa e successivamente, dal 1801, professore di Calcolo sublime (7) nell'Università di Pavia, della quale Università fu anche rettore. Dal 1811 fu ispettore generale della Pubblica Istruzione del Regno d'Italia (8).

Brunacci fu autore di varie opere, ma quella che interessa la nostra indagine è il *Corso di matematica sublime in quattro volumi*. Volumi che furono pubblicati tra il 1804 e il 1807, mentre Brunacci insegnava a Pavia, ma sviluppano i contenuti delle lezioni che egli aveva tenuto a Pisa.

- Il secondo studioso che segnalo è un allievo di Brunacci, del quale, a partire dall'anno 1817, ricoprì la cattedra di Calcolo sublime nell'Università di Pavia, Si tratta di **Antonio Maria Bordoni** (1788-1860), autore dell'opera *Lezioni di calcolo sublime*, pubblicata nel 1831.

Bordoni è considerato il fondatore della scuola matematica di Pavia, alla quale si formarono personaggi del calibro di Francesco Brioschi (1824-1897) – della cui tesi di laurea Bordoni fu relatore – e Luigi Cremona (1830-1903).

BIBLIOGRAFIA.

[1] Eric T. BELL, *I grandi matematici*, Firenze, Sansoni, 1966.
[2] Carl B. BOYER, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1976.
[3] EUCLIDE, *Gli Elementi*, Torino, UTET, 1970.
[4] Attilio FRAJESE, *Attraverso la storia della matematica*, Firenze, Le Monnier, 1971.
[5] Antonino GIAMBO' – Roberto GIAMBO', *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.
[6] Dirk J. STRUIK, *Matematica: un profilo storico*, con un'appendice di Umberto Bottazzini, Bologna, Il Mulino, 1981.
[7] Friedrich WAISMANN, *Introduzione al pensiero matematico*, Torino, Boringhieri, 1971.

[7] "Calcolo sublime" era allora chiamato il Calcolo Infinitesimale.

[8] Onde evitare ogni fraintendimento preciso che si tratta del Regno d'Italia dell'epoca napoleonica, denominato anche Regno Italico (1805-1814).