ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE A.S. 2019/2020
Istituzione Scolastica: Liceo Scientifico G. Spano di Sassari

ASSEGNAZIONE DEGLI ELABORATI DI MATEMATICA E FISICA
Classe 5ª Sez. A

ELABORATO 1

1. Enuncia e dimostra il teorema della media integrale. Illustrane l'interpretazione geometrica e spiega per quale ragione il teorema prende il nome di teorema del valor medio.
2. Sia $i(t) = -3t^2 + 8t$ l'intensità di corrente in funzione del tempo, espressa in Ampere, che scorre lungo un conduttore. Il tempo è misurato in secondi e $0 \leq t \leq 2$. Dimostra che esiste un istante t interno all'intervallo $[0\ s; 1{,}5\ s]$ nel quale l'intensità istantanea di corrente è uguale alla media e determina il valore di tale istante.
3. Definisci i circuiti semplici in corrente alternata e calcola, per ciascuno di essi, la potenza media. Commenta i risultati ottenuti da un punto di vista fisico.

ELABORATO 2

1. Introduci il concetto di campo di forze, definisci il vettore intensità di campo e spiega cosa sono e come si costruiscono le linee di campo.
2. Definisci il campo elettrico $\vec{E}$ e il potenziale elettrico V generati da una distribuzione di cariche, con particolare riferimento al caso di una carica puntiforme e di un numero finito di cariche puntiformi.
3. Data la funzione che descrive il potenziale V(x) in un punto x di ascissa generica x, giustifica la relazione $E_x(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$.
4. In una regione di spazio è presente un campo elettrostatico con simmetria radiale rispetto a un punto O. Prendendo O come origine del riferimento, il potenziale V(r) associato a $\vec{E}(r)$ è

   $V(r) = 4r^2 e^{-\frac{r^2}{4}}$, con V misurato in volt e r in metri.

   a. Rappresenta la funzione V(r) per $r \geq 0$ e stabilisci a quale distanza da O si ha un campo elettrico nullo.
   b. In quali regioni di spazio, su una carica di prova positiva, agisce una forza diretta verso O? In quali una forza di verso opposto?
   c. Se un protone si trova a una distanza pressoché infinita da O e ha un'energia totale di 5 eV, riesce a raggiungere il punto O? Motiva la risposta.

ELABORATO 3

1. Dopo aver definito i punti di massimo e di minimo di una funzione, enuncia e dimostra una condizione sufficiente per l'esistenza di un massimo o di un minimo relativo interno a un intervallo. Illustra, inoltre, come si determinano tali punti nello studio di una funzione, specificando se si tratta di massimi e minimi assoluti o relativi.
2. Considera, poi, una spira quadrata di lato 50 cm immersa in un campo magnetico uniforme che forma con la normale al piano della spira un angolo di 60°. Il modulo del campo magnetico, misurato in tesla, varia nel tempo, misurato in secondi, secondo la legge $B(t) = t \cdot e^{-t^2}$, con $t \geq 0$.
   Determina in quale istante è massimo il flusso magnetico attraverso la superficie della spira e calcolane il valore massimo.
   Quanto vale la forza elettromotrice indotta nella spira nell'istante determinato?
3. Spiega che cos'è il flusso del campo magnetico attraverso una superficie, con particolare riferimento a come esso interviene nella descrizione del fenomeno dell'induzione elettromagnetica. Quanto vale il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa? Spiega perché.

ELABORATO 4

1. Spiega quale forza agisce su un filo rettilineo percorso da corrente immerso in un campo magnetico e utilizza il risultato ottenuto da Ampère, per l'interazione tra due fili, per dedurre la legge che descrive il modulo del campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente, secondo la legge di Biot-Savart.

2. In figura sono rappresentati due fili rettilinei e paralleli di lunghezza indefinita, perpendicolari al piano della pagina; fissando nella pagina un sistema di riferimento Oxy in cui le lunghezze si misurano in metri, i fili passano uno per l'origine O e l'altro per il punto .A(2; 0). I fili sono percorsi da correnti costanti di intensità rispettivamente i_o = 4,0 A e i_A = 1,0 A, entrambe con verso uscente dalla pagina.

   a. Individua le coordinate di un punto C sull'asse x in cui il campo magnetico risultante è nullo.
   b. Detto P un punto sull'asse x avente l'ascissa x > 2, determina la direzione e il verso del campo magnetico in P e verifica che il suo modulo è:
   $$B(x) = k \cdot \frac{5x - 8}{x^2 - 2x}$$
   dove k è un'opportuna costante positiva.
   c. Rappresenta il grafico probabile della funzione y = B(x) nel dominio relativo alla questione fisica proposta e trova le equazioni dei suoi asintoti.

3. Fornisci la definizione e la classificazione di asintoti di una funzione e descrivi il procedimento per determinarne l'eventuale presenza.

ELABORATO 5

1. Dopo aver definito la funzione integrale, enuncia e dimostra il teorema di Torricelli-Barrow e deduci, da questo, la formula per calcolare l'integrale definito di una funzione continua in un intervallo [a; b].

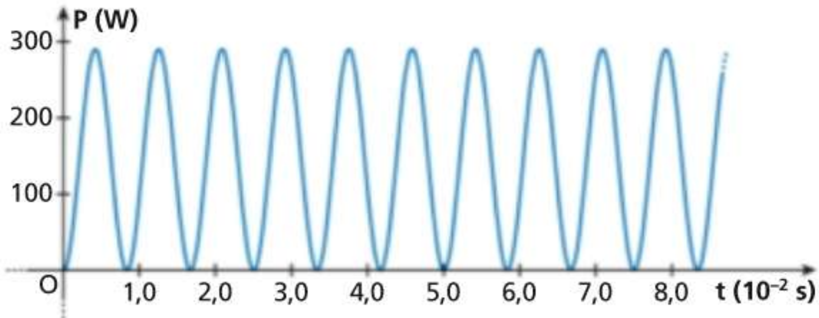
2. Un condensatore sferico è formato da due sfere concentriche di spessore trascurabile e di raggi rispettivamente R e r, con R > r. Supponi di caricare positivamente l'armatura sferica interna: sulla superficie interna del conduttore sferico esterno viene indotta una carica uguale e negativa, mentre sulla superficie esterna si crea una carica positiva. Quest'ultima carica può essere eliminata collegando la superficie a terra.
   a. Determina il campo elettrico prodotto dal condensatore sferico.
   b. Determina la differenza di potenziale tra le armature del condensatore.
   c. Ricava l'espressione della capacità del condensatore.

3. Descrivi e analizza un circuito puramente capacitivo in corrente alternata.

ELABORATO 6

1. Descrivi in che modo si conduce lo studio di una funzione reale a variabile reale. In particolare definisci la sua concavità, definisci e classifica i punti di flesso e spiega dettagliatamente come si determinano.

2. Un alternatore è costituito da una bobina che ruota tra le espansioni polari di un magnete. Tra i due poli dell'alternatore è collegata una resistenza e la potenza dissipata per effetto Joule sulla resistenza in funzione del tempo segue la relazione $P(t) = P_{max} \cdot sin^2(\omega t)$.
   Il grafico in figura ne evidenzia l'andamento, in una scala opportuna.



   a. Determina l'istante t_n in cui P(t) assume l'n-esimo massimo in funzione del parametro ω.
   b. Determina il periodo della funzione P(t) sapendo che il ventesimo massimo è ottenuto per $t = \frac{3\pi}{58}$ s e trova la frequenza della f.e.m. indotta V(t).

3. Considera un alternatore costituito da una spira che ruota con velocità angolare ω costante in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ e dimostra, attraverso la legge di Faraday-Neumann, che la forza elettromotrice indotta istantanea f_{em} che si genera nella spira è espressa dalla funzione $f_{em}(t) = f_0 \sin(\omega t)$.

ELABORATO 7

1. Definisci e analizza un circuito RL determinando la funzione che esprime l'intensità di corrente che attraversa il circuito. Come varia la corrente quando il generatore viene eliminato dal circuito?

2. Considera un circuito RL composto da un interruttore, un resistore di resistenza R = 5 Ω, un induttore di induttanza L = 0,3 H e un generatore di tensione continua con forza elettromotrice f_{em}= 12 V.
   L'intensità della corrente che attraversa il circuito in funzione del tempo, a partire dall'istante di chiusura dell'interruttore, è data da:
   $$i(t) = a + be^{-\frac{R}{L}t},$$
   dove i è misurata in Ampere e t in secondi.
   a. Determina i valori delle costanti a e b, sapendo che all'istante t = 0 s la corrente è nulla e che il valore di regime della corrente $i_\infty = \lim_{t\to\infty} i(t)$ è uguale a 2,4 A.
   b. Determina la velocità di variazione dell'intensità di corrente nel circuito nell'istante t = 0 e nell'istante in cui il valore della corrente è pari al 50% del valore di regime.
   c. Dopo quanto tempo dalla chiusura del circuito la velocità di variazione dell'intensità di corrente è di 5 A/s? Quanto vale l'intensità di corrente i in tale istante?

ELABORATO 8

1. Definisci le equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti e illustrane il procedimento risolutivo.

2. Considera il sistema formato da una molla ideale con costante elastica k, vincolata a un estremo. All'altro estremo si trova una sferetta di massa m e il sistema si muove senza attrito su un piano orizzontale.
   a. Scrivi l'equazione differenziale che fornisce lo spostamento s (t) della sferetta rispetto alla posizione di equilibrio.
   b. Osserva l'equazione differenziale del circuito LC: dal punto di vista matematico è identica. Determina a che cosa corrispondono, nel circuito LC, lo spostamento, l'accelerazione, la massa della sferetta e la costante elastica della molla.
   c. Ripercorri la risoluzione dell'equazione del circuito LC per risolvere l'equazione differenziale che fornisce lo spostamento s(t) della sferetta. Scegli come istante iniziale quello in cui la sfera è nella posizione di massimo allontanamento, cioè s = a.

ELABORATO 9

1. Introduci, illustra e dimostra la legge di Faraday-Neumann-Lenz.

2. Un circuito chiuso, composto da un filamento di resistenza complessiva R = 0,10 Ω e da un amperometro di resistenza trascurabile, subisce la variazione nel tempo di un campo magnetico secondo la legge

$$\Phi(t)=\Phi(0)(1\text{-}3t^2 + 2t^3)$$

in cui $\Phi(0) = 3{,}2\cdot 10^{-3}$ Wb.

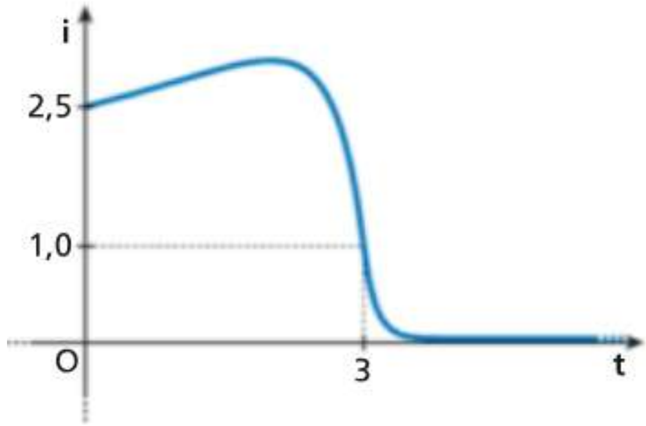
Quanto segna l'amperometro al tempo t = 3,0 s? Dopo quanto tempo si ha il passaggio della corrente di intensità massima?

ELABORATO 10

1. Illustra il fenomeno dell'autoinduzione, descrivi gli induttori e spiega cosa rappresenta il coefficiente di autoinduzione L di un circuito.

2. Analizza e descrivi il fenomeno della mutua induzione tra due circuiti distinti ed esprimi la forza elettromotrice indotta nei due circuiti in funzione della mutua induttanza M.

3. Il grafico in figura rappresenta la funzione $\mathrm{i}(\mathrm{t})$, derivabile in $[0; +\infty[$.



   a. Dalle informazioni ricavabili dal grafico deduci i valori delle costanti a, b e c, in modo che il grafico corrisponda alla funzione

$$i(t) = \begin{cases} \frac{t^2+at+b}{(t-4)^2} & \text{se } 0 \leq \mathrm{t} \leq 3 \\ e^{-c(t-3)} & \text{se } \mathrm{t} > 3 \end{cases}.$$

   b. Verificato che i valori richiesti sono $a = -16$, $b = 40$ e $c = 8$, supponi che la funzione $\mathrm{i}(\mathrm{t})$, ottenuta sostituendo questi valori, rappresenti come varia l'intensità di corrente (misurata in Ampere) al variare del tempo (misurato in millisecondi) nella fase di apertura di un circuito. Determina in quale istante la corrente raggiunge la sua massima intensità e qual è il valore massimo raggiunto.

   c. Nel momento di apertura di un circuito si manifesta, ai capi dell'interruttore, una sovratensione autoindotta, detta anche extratensione di apertura, data da

      $V_L(t) = -L\,\frac{di(t)}{dt}$, dove L è il coefficiente di autoinduzione.

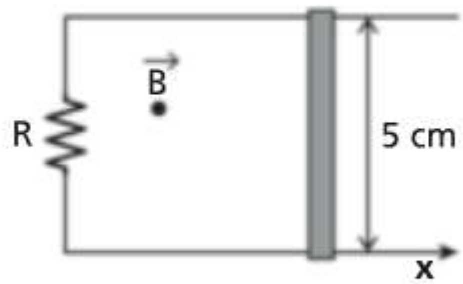
      Determina in quale istante, nella situazione considerata, la tensione autoindotta è massima.

ELABORATO 11

1. Partendo dalla definizione di intensità di corrente elettrica media, definisci l'intensità di corrente istantanea, descrivi il verso convenzionale della corrente e qual è la relazione che lega la carica che attraversa una sezione del filo e il tempo trascorso, nel caso in cui il filo sia attraversato da una corrente *continua*.

2. Illustra brevemente il funzionamento dell'alternatore e descrivi l'intensità di corrente in funzione del tempo generata dalla tensione alternata da esso prodotta.

3. Considera una barra metallica che scivola verso destra su due rotaie, anch'esse di metallo, parallele e distanti fra loro 5 cm. La resistenza elettrica delle rotaie e della barra è trascurabile, mentre nel circuito è presente un resistore con resistenza $R = 10\ \Omega$.



Il sistema si trova all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 200\ mT$, perpendicolare al piano delle rotaie.
In base alla legge di Faraday-Neumann-Lenz, la corrente indotta che circola nel circuito è espressa da

$$i(t) = -\frac{B}{R} \cdot \frac{dA(t)}{dt},$$

dove $A(t)$ indica la superficie della spira all'istante t.
Se la posizione della barra è descritta dalla funzione $x(t) = \dfrac{4\,e^{t-2}}{e^{t-2}+1}$ determina:
   a. la posizione della barra all'istante $t_0 = 0$ s;
   b. l'espressione della funzione che descrive l'intensità della corrente indotta al variare del tempo;
   c. l'istante in cui la corrente indotta ha un punto stazionario e la posizione della barra in tale istante.

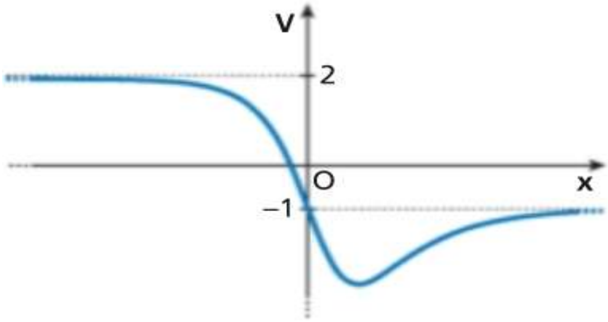
ELABORATO 12

1. Definisci i concetti di derivata e di primitiva di una funzione. Illustra quali relazioni sussistono:
   - tra il grafico di una funzione e il grafico della sua derivata;
   - tra il grafico di una funzione e il grafico di una sua primitiva.

2. Una particella dotata di carica elettrica positiva q si trova in una regione di spazio in cui è presente un campo elettrostatico non uniforme. Il potenziale del campo lungo una direzione x assegnata segue la legge:

$$V(x) = \frac{ae^x + bx}{x - e^x}, \quad a, b \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Il grafico di V(x) è rappresentato nella figura sottostante.



a. Dopo aver determinato i valori dei parametri a e b, scrivi la funzione E(x) che descrive la componente del campo elettrico nella direzione x. Studia E(x) e disegna un suo grafico approssimativo.
b. Esiste un punto dell'asse x in cui la particella è in condizione di equilibrio? Se sì, tale equilibrio è stabile?

3. Nel problema precedente la particella carica considerata si trova immersa in un campo elettrostatico. Illustra a quale forza è sottoposta una particella carica che si muove, invece, in un campo magnetico uniforme e descrivine il moto.

ELABORATO 13

1. Illustra i circuiti semplici in corrente alternata (circuito *puramente ohmico*, circuito *puramente induttivo* e circuito *puramente capacitivo*) analizzando come in ognuno di essi la corrente oscilla rispetto alla forza elettromotrice.

2. In un circuito di resistenza $R = 5\,\Omega$ circola una corrente alternata con periodo $T = \frac{2\pi}{3}\,s$, che varia nel tempo secondo la legge $i(t) = \frac{V}{R} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, dove $i(t)$ è espressa in Ampere e $V = 10\,V$ è il valore massimo della tensione.
   Ricordando che il valore efficace f_{eff} di una funzione periodica $f(t)$ di periodo T è
   $f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$
   dimostra che il valore efficace della corrente $i(t)$ che circola nel circuito è
   $i_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{V}{R} = \sqrt{2}\,A$

3. Definisci il circuito RLC e spiega in che modo, dalle equazioni che lo descrivono, si possono ottenere le funzioni che esprimono l'andamento dell'intensità di corrente nei circuiti semplici in corrente alternata. Spiega, infine, cosa sono le curve di risonanza.

ELABORATO 14

1. Enuncia e dimostra il teorema di Gauss per il campo elettrico e per il campo magnetico.

2. Una sfera di materiale dielettrico, con costante dielettrica relativa ε_r e di raggio R (espresso in metri), è omogeneamente carica in tutto il suo volume; indichiamo con Q la carica totale (espressa in Coulomb). La sfera è immersa in un mezzo dielettrico di costante dielettrica relativa uguale ad 1.

a. Considera una superficie sferica di raggio r concentrica con la sfera carica: verifica che la carica q(r) interna a tale superficie è $q(r) = \frac{Q}{R^3}r^3$ per r ≤ R e applica il teorema di Gauss per dimostrare che il modulo del campo elettrico generato dalla sfera carica dipende dalla distanza r dal centro secondo la seguente funzione:

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^3}r & se\ 0 \leq r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & se\ r > R \end{cases}$$

dove ε_0 è la costante dielettrica del vuoto.

b. Stabilisci la condizione in cui la funzione E(r) risulta continua per ogni r ≥ 0. Assumendo soddisfatta tale ipotesi, calcola $\lim_{r\to+\infty} E(r)$ e rappresenta il grafico probabile di E(r).

ELABORATO 15

1. Fornisci la definizione di funzione continua, enuncia e illustra i principali teoremi sulle funzioni continue.

2. Classifica e descrivi, anche mediante esempi, i punti di discontinuità di una funzione $\mathrm{f(x)}$.

3. La seguente funzione esprime il potenziale elettrico $\mathrm{V(r)}$, in un punto posto a distanza r dal centro di una sfera conduttrice di raggio R e carica positivamente:

$$\mathrm{V(r)} = \begin{cases} 200 & \mathrm{se}\ 0 \leq \mathrm{r} \leq \mathrm{R} \\ \frac{20}{\mathrm{r}} & \mathrm{se}\ \mathrm{r} > R \end{cases},$$

dove r e R sono espressi in metri e V in Volt.

a. Trova il valore della carica Q posta sulla sfera, sapendo che se $\mathrm{r} > R$ allora $\mathrm{V(r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{r}}$.

b. Sapendo che $\mathrm{V(r)}$ è una funzione continua, trova il raggio R della sfera conduttrice e rappresenta il grafico probabile di $\mathrm{V(r)}$.

c. A quale distanza dal centro della sfera il potenziale vale 3,2 V?

d. Che cosa puoi affermare sul valore del potenziale elettrico in un punto molto lontano dalla superficie della sfera?

ELABORATO 16

1. Definisci e descrivi, anche tramite esempi, le forme indeterminate e spiega, in particolare, come si può risolvere la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Dopo averli definiti, illustra come si possono confrontare infiniti e infinitesimi ed esponi il principio di sostituzione degli stessi. Come può, quest'ultimo, essere applicato per risolvere alcune forme di indeterminazione?

2. La carica q(t), in Coulomb, transitata fino all'istante t, in secondi, attraverso la sezione di un filo conduttore rettilineo di lunghezza indefinita è espressa dalla funzione

$$q(t) = 2 + \frac{t^2 - 4}{\sqrt{t^2 + 4}}$$

A distanza r = 1 m dal filo si trova una piccola spira conduttrice di area 1 cm2 e resistenza R = $2 \cdot 10^{-2}$ Ω, disposta in modo che il suo piano contenga il filo stesso.

a. Determina l'intensità i(t) della corrente che scorre nel filo all'istante t e verifica che per ogni t ≥ 0 il verso di tale corrente non cambia. In quale istante è massima i(t) e qual è il suo valore massimo? A quale valore limite tende i(t) per $t \to +\infty$?

b. Considera il campo magnetico B(t) generato dalla corrente i(t) nel punto che corrisponde al centro della spira e supponi che tale campo sia uniforme in tutti i punti interni della spira stessa. Determina l'intensità l(t) della corrente indotta nella spira all'istante t. C'è un istante in cui la corrente indotta l(t) si annulla e cambia verso?

ELABORATO 17

1. Definisci le equazioni differenziali e il problema di Cauchy. Spiega cosa s'intende per equazione a variabili separabili e illustrane il procedimento risolutivo.

2. Considera un circuito RC composto da un interruttore, un resistore di resistenza R = 20 Q, un condensatore di capacità C = $5 \cdot 10^{-6}$F e un generatore di tensione continua con forza elettromotrice f_{em}= 100 V. Inizialmente l'interruttore viene chiuso e il condensatore si carica secondo la legge

$$Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = f_{em}.$$

   a. Determina la funzione q(t), sapendo che al tempo t = 0 la carica è nulla.
   b. Qual è il limite per $t \to \infty$ di q(t)? Che significato ha?

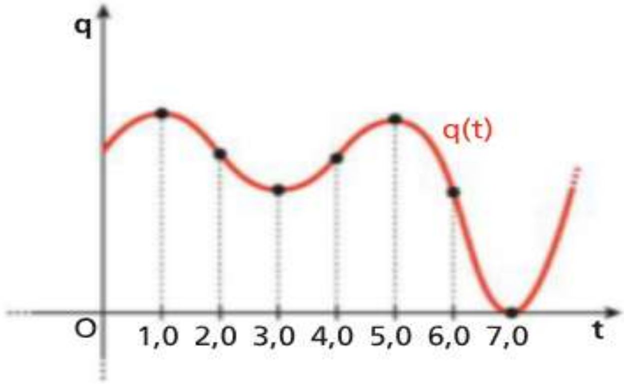
   Dopo un tempo sufficiente a caricare completamente il condensatore, l'interruttore viene posizionato in modo da eliminare il generatore dal circuito e il condensatore comincia a scaricarsi secondo l'equazione:

$$Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = 0.$$

   c. Verifica che la funzione $q(t) = e^{-\frac{t+k}{RC}}$ è una generica soluzione di questa equazione differenziale e determina la costante k.
   d. Dopo quanto tempo il condensatore avrà il 60% della sua carica iniziale?

ELABORATO 18

1. Uno dei problemi che ha portato a sviluppare il concetto di derivata è la ricerca dell'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto: illustra tale problema e spiega come è stato risolto introducendo il concetto di derivata.
2. Spiega, anche tramite qualche esempio, qual è la relazione tra il concetto di derivata e la velocità di variazione di una grandezza rispetto a un'altra.
3. Considera la carica elettrica che attraversa la sezione di un conduttore e che segue una legge $q(t)$ il cui grafico è rappresentato in figura. Nel grafico sono evidenziati gli estremi relativi e i flessi.



   a. In quali intervalli l'intensità di corrente $i(t) = q'(t)$ è positiva e in quali è negativa?
   b. In quali istanti si hanno dei massimi o dei minimi per $i(t)$?
   c. Traccia il grafico possibile per $i(t)$.

ELABORATO 19

1. Descrivi le origini del calcolo integrale partendo dal *metodo di esaustione* di *Eudosso*, passando *al metodo degli indivisibili* di *Cavalieri* per arrivare, infine, alla moderna definizione di *integrale definito*.

2. In un circuito in moto rispetto a un campo magnetico B, la forza elettromotrice indotta varia al variare del tempo secondo la legge $f(t) = -3t^2 + 2t$, dove f è espressa in Volt e t in secondi. Calcola il flusso del campo magnetico B all'istante $t = 4\ s$, sapendo che all'istante $t = 0\ s$ il flusso vale $\Phi(\vec{B}) = 0\ Wb$.