**Tema: Simmetrie.**

di Antonino Giambò

**1.** Uno dei concetti più importanti, e non solo della Matematica, è quello di **simmetria**. Il termine sta ad indicare **qualcosa che rimane uguale a se stessa in seguito a particolari trasformazioni**.

In questo articolo, dopo un cenno a diversi oggetti che presentano simmetrie interessanti, mi soffermo sulle equazioni e sui sistemi simmetrici per trarne qualche utile indicazione sul piano didattico.

L'articolo è ispirato alla conferenza che il matematico Hans Freudenthal (1905-1990) tenne durante il II Congresso ICMI, tenutosi a Exeter (Regno Unito) nel 1972 e che è riportata nel volume *La didattica della matematica oggi*, curato da C. Sitia e pubblicato a Bologna da Pitagora Editrice nel 1979 (pag. 91 e segg.).

- In geometria, il concetto di simmetria è cosa nota a tutti gli studenti di ogni ordine e grado. In particolare, sono certamente conosciute la *simmetria centrale* e la *simmetria assiale*.

A titolo di esempio, ogni quadrato presenta una simmetria centrale (che poi è la stessa cosa di una rotazione di 180° intorno al suo centro – figura 1). Presenta poi 4 simmetrie assiali: 2 rispetto alle sue diagonali e 2 rispetto alle rette mediane (retta mediana è quella che congiunge i punti medi di due lati opposti). Ma ogni quadrato è una figura simmetrica anche rispetto alle rotazioni di $\pm 90°$ intorno al suo centro: sono, come la rotazione di 180°, casi particolari di *simmetria radiale* (o *rotazionale*).

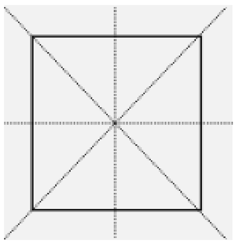

figura 1

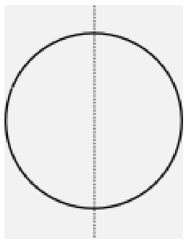

figura 2

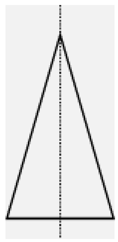

figura 3

La simmetria è una peculiarità dei poliedri regolari.

Restando in ambito geometrico, è noto che a Talete è attribuita la scoperta di alcune proprietà delle figure geometriche, come in particolare le seguenti:

- Ogni diametro divide il cerchio in due parti uguali.
- Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.

Anche se qualche antico commentatore asserisce che Talete abbia dimostrato queste proprietà, nessuno ci crede veramente. Certamente egli le ha intuite: in che modo non ci è dato sapere, ma non è escluso che, in questa operazione, abbia potuto svolgere un ruolo importante la simmetria che caratterizza quelle proprietà: il cerchio è infatti simmetrico rispetto ad ogni suo diametro (figura 2), il triangolo isoscele è simmetrico rispetto alla sua altezza propriamente detta (figura 3). Neanche questo, tuttavia, si può dire che sia certo. E ciò perché ai tempi di Talete il concetto di "simmetria" non era quello che intendiamo noi.

Per esempio, in Platone (*Timeo*), cioè ancora due secoli dopo Talete, la "simmetria" è intesa come "proporzione tra le parti e il tutto" o come "armonia delle parti" e questo concetto permase a lungo, specialmente in campo artistico, fino ai tempi moderni.

Un esempio di "armonia delle parti" presso gli antichi Greci si riscontra nelle statue di esseri umani. Queste andavano scolpite seguendo un criterio secondo cui la sezione aurea [1] svolgeva un ruolo fondamentale: anzitutto l'ombelico doveva dividere l'altezza della statua in due parti, di cui quella inferiore doveva essere sezione

[1] In realtà, presso i Greci il termine "sezione aurea" non esisteva, ma al suo posto usava parlare di "media ed estrema ragione" (cfr.: Euclide, *Elementi*, libro VI, definizione III). Il termine "sezione aurea" compare per la prima volta nell'Ottocento, precisamente nel 1826, in una nota del matematico tedesco Martin Ohm (1792-1872), anche se dalla nota stessa di evince che il termine non era stato coniato da lui, per cui il mistero sull'autore del nome rimane.
Martin è fratello del più celebre Georg Simon (1789-1854), fisico e matematico, noto per le famose leggi sulla resistenza elettrica.

aurea dell'intera altezza; la parte superiore, a sua volta, doveva essere divisa dalla base del collo in due parti, di cui quella inferiore doveva essere sezione aurea dell'intera parte; infine la posizione degli occhi doveva dividere in media ed estrema ragione la parte che va dalla base del collo fino alla sommità del capo (figura 4).

Per esempio, in una statua alta 160 cm (figura 4), un po' di algebra permette di stabilire che l'ombelico (C) dovrebbe situarsi a circa 99 cm dalla base di appoggio (A), la base del collo (D) a circa 38 cm dall'ombelico e gli occhi (E) a circa 14 cm dalla base del collo; vi sarebbero infine 9 cm circa tra la posizione degli occhi e la cima del capo (B).

Insomma, esprimendo le lunghezze in centimetri:

$AC \approx 99,\ CD \approx 38,\ DE \approx 14,\ EB \approx 9.$

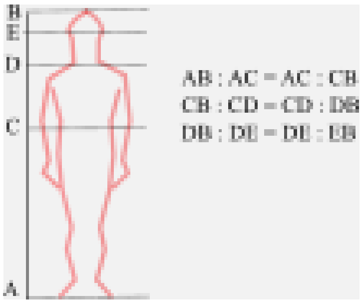

figura 4

Sempre in ambito geometrico, tre secoli dopo Talete, il termine "simmetria" ha il significato di "commensurabile". Riporto, al riguardo, la definizione I del libro X degli *Elementi* di Euclide:

*Sono definite grandezze commensurabili* (σύμμετρα, *symmetra*) *quelle misurate da una stessa misura, incommensurabili* (ἀσύμμετρα, *asymmetra*) *quelle di cui non esiste alcuna misura comune*.

Il concetto di "simmetria" come lo intendiamo noi, perlomeno in geometria, compare nell'Ottocento, correlato alla teoria dei gruppi di trasformazioni.

- Si parla di simmetria anche con riguardo alle funzioni reali di variabile reale. Ciò accade, per esempio, quando, considerata una funzione f(x), risulta f(–x)=f(x) oppure f(–x)=–f(x): nel primo caso la funzione è simmetrica rispetto all'asse y (figura 5), nel secondo rispetto all'origine del sistema di riferimento (figura 6).

Sapere che una funzione presenta una di tali simmetrie permette di limitare il campo d'indagine al fine del tracciamento del suo grafico (ovviamente se non si ricorre ad uno strumento di calcolo automatico).

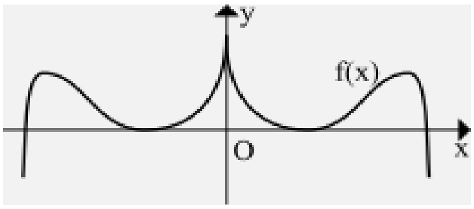

figura 5

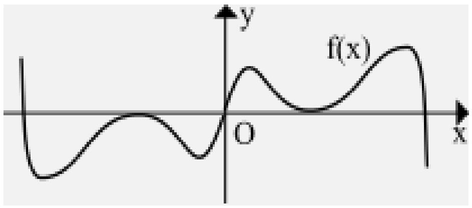

figura 6

- Il concetto di simmetria non è estraneo alla statistica. Precisamente si dice che una distribuzione di frequenze è *simmetrica* se coincidono media aritmetica, mediana e moda.

Nell'esempio illustrato (figura 7) risulta: media aritmetica=moda=mediana=4. E si può costatare come la distribuzione presenti una simmetria rispetto alla retta tratteggiata in figura.

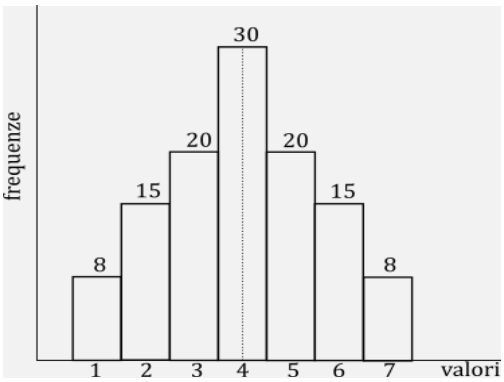

figura 7

Invece, quando la media aritmetica e la moda non coincidono, la distribuzione di frequenze si dice *asimmetrica*. Precisamente, se la media aritmetica è maggiore della moda si ha una *asimmetria positiva* (o *destra*), nella quale la coda più lunga è a destra della moda (figura 8, dove media aritmetica ≈ 3,6 e moda = 3); se la media aritmetica è minore della moda si ha una *asimmetria negativa* (o *sinistra*), nella quale la coda più lunga si trova alla sinistra della moda (figura 9, dove media aritmetica ≈ 4,4 e moda = 5).

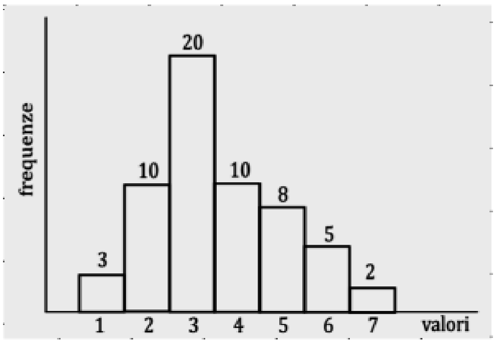

figura 8

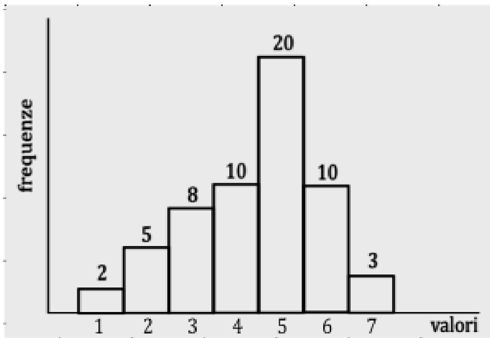

figura 9

- In questioni di probabilità la simmetria direi che è di casa. Un esempio:

Proveniente dallo spazio, cade sulla Terra un meteorite: qual è la probabilità che cada nell'emisfero boreale?

Qui la simmetria è evidente: il meteorite o cade nell'emisfero boreale o cade nell'emisfero australe, con uguale probabilità; non ci sono altre alternative (escludiamo l'ipotesi remota che cada a cavallo dell'equatore). Quindi la probabilità cercata è $1/2$.

D'altro canto, come in statistica, anche le distribuzioni di probabilità possono essere simmetriche.

Lo è, per esempio, la distribuzione normale (o gaussiana), la quale, rappresentata in un piano cartesiano (Oxy), è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x=\mu$, dove μ è la media (figura 10)

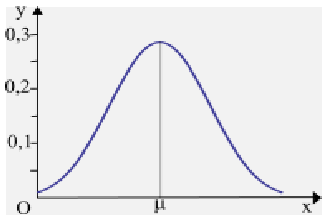

figura 10

- Anche in Fisica si parla di simmetria di un fenomeno: si ha quando il fenomeno si ripete con uguali caratteristiche nel tempo e/o nello spazio.

- In campo artistico gli oggetti che presentano simmetrie varie non si contano. Fornisco due esempi (tra i tanti che si potrebbero portare) di figure che presentano simmetrie, appartenenti ad epoche distanti fra loro.
  - Uno è un prodotto medioevale: si tratta del rosone a tre cerchi concentrici inscritto in un quadrato (figura 11), situato sopra il portale d'ingresso alla Basilica di S. Pietro in Tuscania (Viterbo), risalente al XII-XIII secolo.
  - L'altro è un disegno (figura 12), opera dell'estroso artista olandese Maurits Cornelis Escher (1898-1972).


figura 11


figura 12

- La simmetria è presente spesso in natura, sia in campo macroscopico (girasole, farfalle, fiocchi di neve, cristalli, … ) sia in capo microscopico (struttura molecolare). Nello stesso corpo umano diverse parti presentano una simmetria assiale: si pensi al celebre disegno di Leonardo da Vinci, noto come "Uomo Vitruviano".

- Anche in un ambito frivolo come le carte da gioco francesi sono presenti interessanti simmetrie.

Per esempio, il 4 di “picche” (figura 13) presenta una simmetria centrale rispetto al centro della figura, che è il punto d’incontro delle due rette mediane, ma non presenta simmetrie assiali per dettagli sulla disposizione delle cifre. Se, però, non si tiene conto di tali cifre, allora la figura presenta anche due simmetrie assiali rispetto alle due rette mediane.

Il 5 di “picche” (figura 14), a sua volta, se si osserva bene, si può vedere che non presenta alcuna simmetria, contrariamente a quanto si potrebbe pensare ad un primo superficiale esame. E questo sempre a causa della disposizione delle cifre. Se, però, come prima, non si tiene conto delle cifre, la figura presenta una simmetria assiale rispetto ad una delle rette mediane.

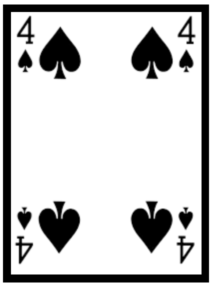

figura 13

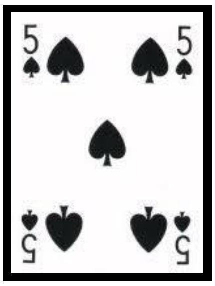

figura 14

- C’è ancora un ambito in cui la simmetria si presenta con una certa frequenza, che giudico interessante mostrare. Si tratta delle relazioni definite in un dato insieme.

È noto che una relazione R, definita in un insieme I, si dice *simmetrica* se, per ogni scelta di due elementi x, y dell’insieme, avviene che se x è in relazione con y allora y è in relazione con x. In simboli:

$$\forall x, y \in I : \ xRy \ \rightarrow \ yRx$$

In questo caso, il grafico della relazione – vale a dire l’insieme delle coppie ordinate (x,y) tali che xRy – rappresentato in un sistema monometrico di assi cartesiani (Oxy), è una *figura simmetrica* rispetto alla diagonale principale degli assi di riferimento, cioè rispetto alla retta di equazione y=x.

Per esempio, se I = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ed R è la relazione, definita in I, tale che xRy se «x+y è un numero dispari», una volta costatato che la relazione è simmetrica, si può osservare che il suo grafico è per l’appunto una figura simmetrica rispetto alla retta y=x (figura 15).

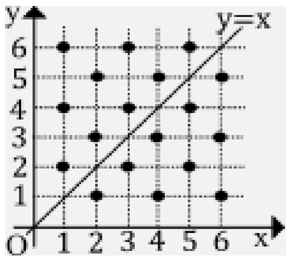


figura 15

Concludo questa parte sulle relazioni simmetriche con una curiosità, che può sembrare sorprendente ai non addetti ai lavori:

*La relazione vuota, definita in un dato insieme* I, *è una relazione simmetrica.*

Per dimostrarlo, supposto che sia T la relazione vuota, definita in I, non si può certamente dimostrare che « $\forall x,y \in I : xTy \rightarrow yTx$ », dal momento che, trattandosi appunto di una relazione vuota, non esiste alcuna coppia di elementi x,y∈I tali che xTy.

Dimostriamo, in alternativa, che è falsa la negazione della proposizione considerata, dal che – in base alla nota identità $\overline{\overline{P}}=P$, dove P è una qualsiasi proposizione – discende che è vera la proposizione in esame. Ora, quella negazione è la proposizione « $\exists x,y \in I : xTy \wedge y \not{T} x$ » ed è sicuramente falsa per il motivo già spiegato, e cioè che non esiste alcuna coppia di elementi x,y∈I tali che xTy.

Caso mai, potrebbe sorgere il dubbio se esista realmente una relazione vuota definita in un dato insieme. Dubbio che in verità si scioglie immediatamente. Basta considerare, per esempio, l’insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e la relazione «$\forall x,y \in I : x+y<0$». Evidentemente nessuna coppia di numeri naturali soddisfa alla relazione, che pertanto è vuota.

**2.** Pure in algebra compaiono oggetti che presentano singolari simmetrie, come per esempio equazioni e sistemi di equazioni cosiddetti simmetrici, per l'appunto. Qui la simmetria, sapientemente utilizzata, permette di risolvere rapidamente questioni che altrimenti risulterebbero, se non complicate o addirittura impossibili, per lo meno noiose a causa delle lungaggini nei calcoli. Ed è su questi esempi che intendo richiamare l'attenzione.

Dico subito che tralascio di occuparmi del seguente sistema simmetrico:

[1] $$\begin{cases} x+y=p \\ x\,y=q \end{cases}$$

che ogni studente di scuola secondaria di 2° grado sa risolvere.

- PRIMA SITUAZIONE. Si consideri la seguente relazione:

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3+6xyz)\,.$$

Spiegare perché non è un'identità.

RISOLUZIONE. Si potrebbe pensare di sviluppare entrambi i membri e far vedere che non sono uguali. Procedimento certamente corretto, ma lungo e noioso, al quale bisogna purtroppo ricorrere in altre circostanze, ma non in questa. Adesso, infatti, basta costatare che il secondo membro della relazione rimane inalterato se si opera lo scambio di x con y, di y con z, di z con x. Mentre, con lo stesso scambio, il primo membro cambia di segno, dal momento che ciascuno dei tre termini $(x–y)^3$, $(y–z)^3$, $(z–x)^3$ cambia di segno.

Se ne desume che i due membri non possono essere identicamente uguali.

A conferma di ciò, si può controllare che gli sviluppi del primo e del secondo membro sono rispettivamente i seguenti, e non sono identici:

$$3\,x\,y^2+3\,x^2\,z+3\,y\,z^2-3\,x^2\,y-3\,x\,z^2-3\,y^2\,z\,,$$
$$3\,x\,y^2+3\,x^2\,z+3\,y\,z^2+3\,x^2\,y+3\,x\,z^2+3\,y^2\,z\,.$$

- SECONDA SITUAZIONE. Si consideri la seguente equazione nelle incognite x, y:

$$2\,x^3-3\,x^2y-3\,x\,y^2+2\,y^3=0\,.$$

a) Verificare che ammette la soluzione $(x,y)=(2,1)$.

b) Trovare un'altra soluzione dell'equazione diversa dalla soluzione (0, 0).

RISOLUZIONE. La prima parte è banale, non me ne occupo. Passo alla seconda parte.

Forse la prima idea che viene in mente è quella di risolvere l'equazione con uno dei metodi che si studiano (o, forse, che si studiavano) a scuola. Per esempio, dovendo essere $y\neq0$, si divide tutto per y e, ponendo $x/y=t$, si ottiene l'equazione ausiliaria:

$$2\,t^3-3\,t^2-3\,t+2=0\,.$$

Da qui, sapendo già che una sua soluzione è $t=2/1=2$, si ricorre alla regola di Ruffini e si ottiene che l'equazione può essere messa nella seguente forma equivalente:

$$(t-2)(2\,t^2+t-1)=0\,.$$

Pertanto, dopo aver risolto, si trovano, oltre a valore t=2, i seguenti altri valori di $t$ : $-1$ e $1/2$.

Di conseguenza, ricordando la posizione $x/y=t$, da cui segue $y=x/t$, si trovano tutte le soluzioni dell'equazione in $\mathbb{R}^2$:

$$\left(x,\frac{x}{2}\right),\quad (x,-x),\quad (x,2x),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}\,.$$

Ora, tutto questo è molto bello e istruttivo, ma il quesito non richiedeva tanto, bensì semplicemente di trovare un'altra soluzione dell'equazione. E questo si poteva fare immediatamente: basta costatare che l'equazione non cambia se si scambiano tra loro x ed y. Il che comporta che, se (2,1) è una sua soluzione, lo è anche (1,2). Abbiamo così trovato rapidamente un'altra soluzione dell'equazione. Fine della trasmissione.

- TERZA SITUAZIONE. Si consideri il seguente sistema nelle incognite x, y:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4\,x\,y+4\,(x+y)=9 \\ 3\,x\,y-8\,(x+y)=-18 \end{cases}$$

Dopo aver verificato che sono sue soluzioni le seguenti coppie ordinate (x,y)=(1,2) e (x,y)=(6,3), spiegare in modo esauriente se il sistema ammette soluzioni complesse, che non siano però reali.

RISOLUZIONE. Tralascio la verifica richiesta, del tutto elementare, e vado all'altra domanda.

Si potrebbe pensare inopinatamente di risolvere il sistema con il metodo di sostituzione, vale a dire calcolando, nella seconda equazione, y in funzione di x e sostituendo l'espressione trovata nella prima equazione al posto di y. Quindi si risolve l'equazione trovata e si traggono le conclusioni. Ma si tratta di un procedimento lungo e dispendioso, che peraltro funziona in questo caso ma in altri casi simili potrebbe non funzionare.

Oppure si potrebbe pensare di ricorrere alle formule di Waring [2] e trasformare il sistema assegnato in sistemi del tipo [1] e quindi, dopo altre elaborazioni, concludere con la risposta. Questo procedimento potrebbe essere seguito se fosse richiesto di risolvere il sistema, senza altre informazioni. Ma qui le informazioni ci sono e bisogna approfittarne, evitando di portare a spasso numeri e lettere con inutile spreco di tempo e di energie preziose.

Precisamente, costatato che abbiamo a che fare con un sistema che non cambia se si scambiano tra loro x ed y, e accertato che sono sue soluzioni le coppie ordinate (1,2) e (6,3), ne consegue che lo sono anche le coppie (2,1) e (3,6). Quindi il sistema ha 4 soluzioni.

D'altro canto, essendo un sistema di 4° grado, non può avere altre soluzioni.

Da tutto ciò discende logicamente che il sistema non ha soluzioni complesse, che non siano le 4 soluzioni reali (1,2), (2,1), (6,3), (3,6).

Per completezza, tralasciando il metodo di risoluzione per sostituzione, descrivo sommariamente come si sarebbe risolto il sistema utilizzando la formula di Waring idonea allo scopo, vale a dire: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$. Ebbene, mediante questa formula e dopo aver osservato che dalla seconda equazione del sistema si ricava: $xy=\frac{8}{3}(x+y)-6$, la prima equazione, in seguito ad idonee sostituzioni e ad alcune semplici elaborazioni, diventa:

$$(x+y)^2-12\,(x+y)+27=0\,.$$

Risolta quest'equazione nell'incognita x+y, si trovano due soluzioni: $x+y=3$, $x+y=9$.

Il sistema assegnato, pertanto, si traduce nei due seguenti sistemi simmetrici:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x\,y=2 \end{cases},\qquad \begin{cases} x+y=9 \\ x\,y=18 \end{cases}.$$

Risolti i quali, si ottengono le 4 soluzioni reali già viste.

*Per quanto possa apparire strano, la forza della matematica è nella sua evasione da ogni pensiero non necessario e nella sua mirabile economia nelle operazioni mentali.*
Ernst Mach, fisico tedesco, 1838-1916
[Fonte: Eric T. Bell, *I grandi matematici*, Firenze, Sansoni, 1966, pag. IX]

[2] Edward Waring, matematico inglese, 1736-1798. In un periodo in cui molti matematici, compreso Waring, erano impegnati nell'impossibile compito di risolvere per radicali equazioni di grado superiore al 4°, il Nostro suggerì procedimenti utili alla risoluzione dei sistemi simmetrici, basati appunto sulle cosiddette "formule di Waring", formule che trasformano il binomio $x^n+y^n$ in polinomi in cui figurano solamente potenze delle indeterminate x+y e xy. Trovò pure diversi teoremi sulla risoluzione delle equazioni algebriche. I suoi risultati in questo campo sono contenuti in due sue opere: *Miscellanea Analytica* (1762) e *Meditationes Algebraicae* (1770).