Tema: Babilonesi: equazioni e quadrati.

di Antonino Giambò

1. In un precedente articolo pubblicato su questa medesima rubrica [(1)] ho accennato alla risoluzione delle equazioni di 2° grado da parte dei Babilonesi. In particolare, ho segnalato come ci fossero due posizioni distinte sulla logica da loro seguita per giungere alla soluzione, entrambe basate sulla costruzione di un quadrato idoneo: costruzione algebrica secondo una tesi (Otto Neugebauer), geometrica secondo l'altra (Jens Høyrup).

Qui riprendo la questione per un approfondimento di questo particolare aspetto, soffermandomi sulle modalità di costruzione di quadrati idonei a risolvere le equazioni, sia di tipo algebrico sia di tipo geometrico, ma senza la pretesa di pensare che i procedimenti che proporrò siano gli unici possibili [(2)].

A chi, poi, volesse approfondire questa questione, per penetrare anche nei meandri della risoluzione delle equazioni di 2° grado, e non solo preso i Babilonesi, suggerisco la lettura di Maracchia [2, pag. 71 e segg.], da cui ho ricavato la maggior parte delle informazioni necessarie per questo contributo.

I Babilonesi, dunque, risolvevano equazioni di 2° grado dei seguenti tipi:

$$(1)\quad x^2 - a\,x = b\,,\quad (2)\quad x^2 + a\,x = b\,,\quad (3)\quad x^2 + b = a\,x\,,$$

dove ai coefficienti a, b erano però attribuiti specifici valori numerici positivi.

Inoltre essi accettavano solo soluzioni positive.

Precisamente, riguardo alle equazioni dei tipi (1) e (2) indicavano, a parole e senza alcun simbolismo, procedimenti risolutivi che possiamo riassumere nelle seguenti corrispondenti formule:

$$(1')\quad x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}\,,\qquad (2')\quad x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}\,.$$

Invece nella risoluzione delle equazioni del tipo (3), prendevano entrambe le soluzioni riassumibili nella formula seguente:

$$(3')\quad x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\,.$$

Come giunsero i Babilonesi a queste formule, ancorché non esplicitamente dichiarate, ammesso che effettivamente le avessero? In realtà, non lo sappiamo e possiamo solamente fare delle supposizioni.

Proporrò, per la dimostrazione di ognuna di tali formule, una via algebrica e una via geometrica.

Ma prima di passare a tali dimostrazioni, al fine di fornire un'idea più concreta del modo di operare dei Babilonesi, riporto alcuni esempi, mutuati dalle tavolette babilonesi rinvenute da Otto Neugebauer.

- Equazione del tipo (1).

Problema: *Si chiede di trovare il lato di un quadrato sapendo che l'area diminuita del lato è 870.*

Equazione nostra che traduce il problema: $x^2 - x = 870$.

Facsimile di procedimento proposto dai Babilonesi [(3)]: Prendi la metà di 1, che è 1/2, e moltiplica 1/2 per 1/2, che è 1/4; aggiungi 1/4 a 870 e ottieni 3481/4; la sua radice quadrata è 59/2. Aggiungi ora 1/2 a 59/2 e trovi 30, il lato del quadrato.

In sintesi, nel nostro linguaggio simbolico:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 870} + \frac{1}{2}.$$

È facile costatare che si tratta di un caso particolare di (1').

---

[1] Cfr.: Breve storia dell'Algebra.

[2] La modalità geometrica di risoluzione delle equazioni di 2° grado ha registrato, prima che s'imponesse la modalità algebrica, l'impegno di altri studiosi. In particolare: al-Khwārizmī e Fibonacci.

[3] Adattato al nostro sistema di numerazione posizionale a base 10. Cosa che faremo anche negli altri esempi. In realtà, i Babilonesi si servivano di un sistema di numerazione posizionale a base 60.

Una considerazione a margine della questione. Il fatto che i dati del problema si combinino perfettamente affinché sotto radice quadrata ci sia un quadrato perfetto, fa intuire che l'autore della traccia del problema sia partito dalla soluzione per risalire alla traccia medesima.
Lo stesso accade nei due esercizi successivi.
E questo suggerisce che i problemi proposti dovessero avere fini didattici.

- Equazione del tipo (2)

Problema: *Si chiede di trovare il lato di un quadrato sapendo che l'area sommata al lato è 3/4*.
Equazione nostra che traduce il problema: $x^2 + x=3/4$.
Facsimile di procedimento proposto dai Babilonesi: Prendi la metà di 1, che è 1/2, e moltiplica 1/2 per 1/2, che è 1/4; aggiungi 1/4 a 3/4 e ottieni 1; la sua radice quadrata è 1. Sottrai ora 1/2 da 1 e ottieni 1/2, il lato del quadrato.
In sintesi, nel nostro linguaggio simbolico:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}.$$

È un caso particolare di (2').

- Equazione del tipo (3)

Problema: *Si chiede di trovare la base e l'altezza di un rettangolo sapendo che la loro somma è 14 mentre l'area del rettangolo è 48*.
Il problema si traduce, nel nostro linguaggio simbolico, nel seguente sistema, dove x ed y sono la base e l'altezza cercate:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ x\,y = 48 \end{cases}$$

Sistema che, di fatto, ha come risolvente l'equazione: $x^2+48=14x$, del tipo (3).
Facsimile di procedimento proposto dai Babilonesi: Prendi la metà di 14, che è 7, e moltiplica 7 per 7, che è 49; sottrai 48 da 49 e ottieni 1; la sua radice quadrata è 1. Se ora a 7 aggiungi 1 ottieni 8, se gli sottrai 1 ottieni 6, i lati del rettangolo.
Ed anche, aggiungo, trattandosi di un sistema simmetrico, le soluzioni dell'equazione.
In sintesi, nel nostro linguaggio simbolico:

$$x, y = 7 \pm \sqrt{7^2 - 48}$$

È un caso particolare di (3').

2. Passo adesso alla dimostrazione delle formule risolutive, incominciando dall'equazione $x^2 - ax=b$.

- La modalità di costruzione del quadrato "risolvente" per via algebrica non differisce da quella che comunemente adottiamo oggigiorno nella dimostrazione della formula risolvente dell'equazione generale di 2° grado. Precisamente, in sequenza:

$$x^2 - ax = b \;\rightarrow\; x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b \;\rightarrow\; \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b\,.$$

Il quadrato cercato è pertanto $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ che è uguale a $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ +b.
Prendendo la sola radice positiva, si ottiene la soluzione (1').

- Una costruzione geometrica del quadrato potrebbe essere quella descritta qui appresso (figura 1).

Si indica con x il lato del quadrato ABCD (figura 1a), la cui area è ovviamente x^2. Si costruisce, internamente al quadrato, il rettangolo AEFD, di lati AD=x ed AE=a, la cui area è evidentemente ax. La costruzione è resa possibile poiché $x^2>ax$. Di modo che il rettangolo EBCF ha area $x^2 - ax$, vale a dire b. Si traccia la mediana GH del rettangolo AEFD. Ovviamente: DH=HF=$a/2$.

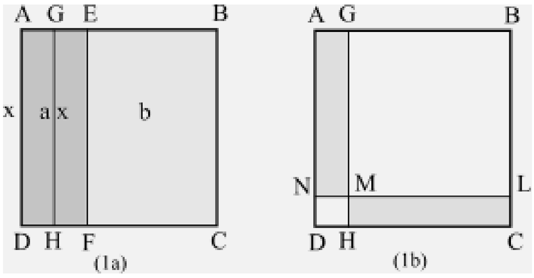

figura 1

Si riporta il rettangolo GEFH nel rettangolo NLCD interno al quadrato (figura 1b). Essendo NM=MH e GM=ML, i due rettangoli AGMN e MLCH sono uguali. Inoltre il quadrilatero NMHD è un quadrato di lato $a/2$. Si costata che anche il quadrilatero GBLM è un quadrato: è esattamente il quadrato cercato, cioè quello che permette di risolvere l'equazione.

A questo punto, infatti, si può stabilire con una certa facilità quanto segue (figura 1b):

$$\text{area (GBLM)} = \text{area (ABCD)} - 2 \text{ area (AGHD)} + \text{area (NMHD)}.$$

D'altro canto (figura 1a):

$$\text{area (ABCD)} - 2 \text{ area (AGHD)} = \text{area (ABCD)} - \text{area (AEFD)} = \text{area (EBCF)}.$$

Dunque:

$$\text{area (GBLM)} = \text{area (NMHD)} + \text{area (EBCF)}.$$

Come dire: $\overline{GB}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$; e pertanto: $\overline{GB} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$.

Se adesso, a GB si somma AG, lungo $a/2$, ottenendo così AB=x, si ricava la formula (1'):

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} + \frac{a}{2}.$$

3. Occupiamoci adesso dell'equazione $x^2 + ax = b$.

- La costruzione algebrica del quadrato è del tutto uguale alla precedente. Infatti, in sequenza:

$$x^2 + ax = b \ \rightarrow \ x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b \ \rightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b\,.$$

Il quadrato cercato è pertanto $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$ che è uguale a $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$.

Prendendo la sola radice positiva, si ottiene la soluzione (2').

- Una costruzione geometrica del quadrato potrebbe essere quella descritta qui appresso (figura 2).

Si indica con x il lato del quadrato ABCD (figura 2a), la cui area è ovviamente x^2. Si costruisce, esternamente al quadrato, dalla parte di BC, il rettangolo BEFC, di lati BC=x e BE=a, la cui area è evidentemente ax. Di modo che il rettangolo AEFD ha area x^2+ax, vale a dire b. Si traccia la mediana GH del rettangolo BEFC. Ovviamente: CH=HF=$a/2$.

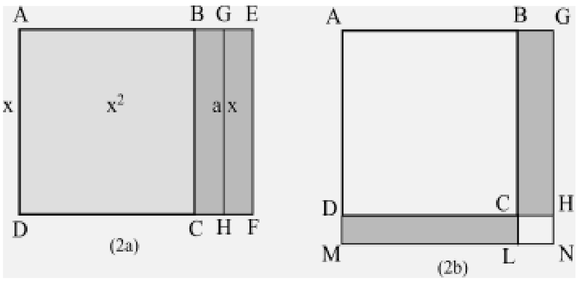

figura 2

Si riporta il rettangolo GEFH nel rettangolo DCLM esterno al quadrato (figura 2b). Essendo CL=CH e BC=DC, i due rettangoli BGHC e DCLM sono uguali. Inoltre il quadrilatero CHNL è un quadrato di lato $a/2$. Si costata che anche il quadrilatero AGNM è un quadrato: è esattamente il quadrato cercato, cioè quello che permette di risolvere l'equazione.

A questo punto, infatti, si può stabilire con una certa facilità quanto segue (figura 2b):

$$\text{area (AGNM)} = \text{area (ABCD)} + \text{area (CHNL)} + 2\ \text{area (BGHC)}.$$

D'altro canto (figura 2a):

$$\text{area (ABCD)} + 2\ \text{area (BGHC)} = \text{area (ABCD)} + \text{area (BEFC)} = \text{area (AEFD)}.$$

Dunque:

$$\text{area (AGNM)} = \text{area (CHNL)} + \text{area (AEFD)}.$$

Come dire: $\overline{AG}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b$; e pertanto: $\overline{AG} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}$.

Se, adesso, da AG si sottrae BG, lungo $a/2$, ottenendo così AB=x, si ricava la formula (2'):

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}.$$

4. Passiamo infine ad occuparci dell'equazione $x^2 + b = ax$.

- La costruzione algebrica procede come negli altri due casi. Precisamente, in sequenza:

$$x^2 + b = ax \;\rightarrow\; x^2 + b - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = ax - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \;\rightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b\,.$$

Il quadrato cercato è pertanto $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$ che è uguale a $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$.

Ovviamente, affinché l'equazione abbia radici (reali), è necessario che sia $(a/2)^2 \geq b$.

- Per una costruzione geometrica del quadrato che risolve l'equazione $x^2 + b = ax$, bisogna supporre che i Babilonesi la ritenessero equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$$

Di fatto, dividendo entrambi i membri dell'equazione per x e ponendo $b/x = y$, si ottiene proprio quel sistema. Ecco allora quale potrebbe essere la costruzione geometrica che cerchiamo.

Si costruisce il rettangolo ABCD di lati AB=x e AD=y, con $x \geq y$ (figura 3a), per cui la sua area è $xy = b$. Si costruisce quindi esternamente ad esso, dalla parte del lato BC, il quadrato BEFC. Indicato con M il punto medio del segmento AE, si ha: $AM = \frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}$, $MB = \frac{x-y}{2}$. Condotta ora per M la parallela ad AD e detto N il punto in cui essa interseca CD, si pone l'attenzione sul rettangolo ABCD, in cui è evidenziato il rettangolo MBCN, interno ad esso.

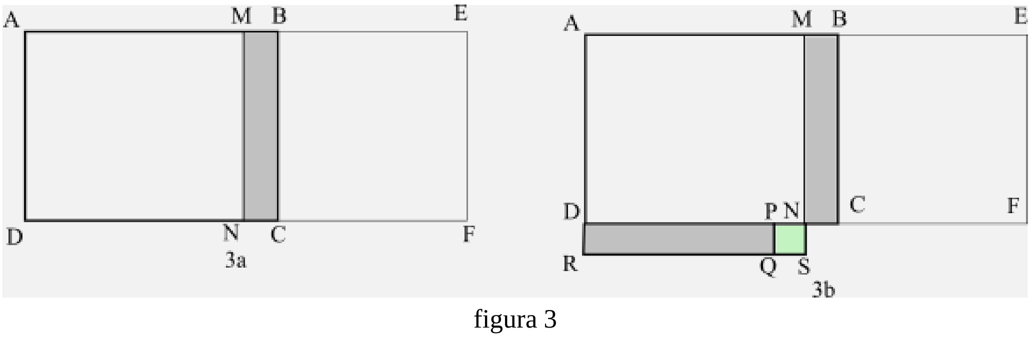

figura 3

Si riporta quindi il rettangolo MBCN nella posizione DPQR (figura 3b), esternamente al rettangolo ABCD. Una volta stabilito che PN=PQ=DR e, di conseguenza, AM=AR, si conclude che il quadrilatero AMSR è un quadrato di lato a/2. Anche il quadrilatero PNSQ è un quadrato: è esattamente il quadrato cercato, vale a dire quello che permette di risolvere l'equazione.

A questo punto, infatti, si può stabilire con una certa facilità quanto segue:

$$\text{area (PNSQ)} = \text{area (AMSR)} - [\text{area (AMND)} + \text{area (DPQR)}].$$

D'altro canto, siccome DPQR=MBCN (vedere figura 3b), si ha:

$$\text{area (AMND)} + \text{area (DPQR)} = \text{area (AMND)} + \text{area (MBCN)} = \text{area (ABCD)}.$$

Dunque:

$$\text{area (PNSQ)} = \text{area (AMSR)} - \text{area (ABCD)}.$$

Come dire: $\overline{\text{PQ}}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$; e pertanto, essendo MB=PQ, segue: $\overline{\text{MB}} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.

Di conseguenza:

$$x = \overline{\text{AM}} + \overline{\text{MB}} = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\,, \quad y = \overline{\text{AR}} - \overline{\text{DR}} = \overline{\text{AM}} - \overline{\text{MB}} = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\,.$$

Sono le due radici dell'equazione. Naturalmente è implicito che sia $(a/2)^2 \geq b$.

5. Per concludere, nessuno in realtà può affermare con certezza se i Babilonesi abbiano seguito una modalità di risoluzione geometrica o se abbiano invece seguito un procedimento di tipo algebrico. Anche se, va detto, la tesi "geometrica" appare più convincente di quella "algebrica". Quello che banalmente mi sento però di affermare è che un qualche procedimento i Babilonesi dovessero averlo seguito per giungere alle formule risolventi che essi non avevano, è vero, ma operavano come se le avessero.

Che poi questo procedimento fosse di tipo geometrico o algebrico, forse non è proprio così rilevante, se si esclude la ovvia e legittima curiosità di capire come operavano gli Antichi.

Quello che invece è verosimile è ciò che sostiene Silvio Maracchia [2, pag. 90] e cioè che: « *nella ripetizione di molti esercizi dello stesso tipo, come appaiono nelle tavolette in nostro possesso, […] il procedimento risolutivo perde il suo significato geometrico* [o algebrico, mi permetterei di aggiungere] *per ridursi ad una pratica di calcolo e, dunque, ad una sorta di "formula risolutiva"* ».

BIBLIOGRAFIA.

[1] Antonino GIAMBO' – Roberto GIAMBO', *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.

[2] Silvio MARACCHIA, *Storia dell'Algebra*, Napoli, Liguori Editore, 2005.