Breve storia della Logica

di Antonino Giambò

1. Uno sguardo panoramico.

La moderna logica matematica è il risultato di diversi filoni di ricerca:

- il primo riguarda la definizione del concetto di proposizione e una prima esplicitazione delle regole di deduzione e risale ad Aristotele (IV sec. a.C.); questa logica - la logica aristotelica – dominò a lungo, praticamente fino alla prima metà dell'Ottocento;
- il secondo è ancora un contributo dei Greci e precisamente delle scuole Megarica e Stoica (IV-III sec. a.C.), alle quali si deve una logica proposizionale molto simile a quella nostra, ma a lungo ignorata;
- la logica medioevale (secoli VI-XV) è il terzo filone: si sviluppò sostanzialmente nel solco della dottrina aristotelica;
- un salto di qualità rispetto alla logica aristotelica si registra nella prima metà dell'Ottocento con l'opera di Boole;
- un ulteriore progresso scaturisce dall'esigenza di un'analisi soddisfacente degli insiemi infiniti di numeri reali e nasce con Cantor nella seconda metà dell'Ottocento;
- per ultimo, nel tentativo di costruire le fondamenta della matematica, si crea un apparato logico che si concreta in un vero e proprio "calcolo": questo filone vede in Peano e Frege i suoi iniziatori.

Lo sbocco finale è duplice: da una parte lo studio della Logica come disciplina a sé, dall'altra la sua stretta relazione con i moderni strumenti di calcolo automatico.

Mentre mi soffermerò abbastanza sui primi tre filoni di ricerca, farò solamente un rapido cenno agli altri tre, con il preciso scopo di evidenziare una stupefacente conclusione.

2. La logica aristotelica.

Aristotele (384-322 a.C.), uno dei maggiori filosofi greci se non addirittura il maggiore, scrisse sei opere di logica che circa tre secoli più tardi Andronico di Rodi (I sec. a.C.), filosofo greco di scuola aristotelica, avrebbe riunito in un unico trattato denominandolo *Organon*, vale a dire "strumento" (ὄργανον, *organon*) per iniziare lo studio della filosofia.

I titoli di tali opere: *Categorie, Interpretazione, Analitici primi, Analitici secondi, Topici, Elenchi sofistici*.

- Nell'*Interpretazione* (un libro), l'autore chiarisce il concetto di *proposizione*, sostenendo che è formata da un soggetto e un predicato (a condizione che si possa stabilire la verità o falsità della proposizione) e può essere di quattro tipologie, come esplicitato nella presente tabella:

Proposizione	Simbolo [1]	Formulazione	Esempio
Universale affermativa	A	Tutti i B sono A	Tutti i siciliani sono italiani (vera)
Universale negativa	E	Nessun B è A	Nessun siciliano è italiano (falsa)
Particolare affermativa	I	Qualche B è A	Qualche siciliano è italiano (vera)
Particolare negativa	O	Qualche B non è A	Qualche siciliano non è italiano (falsa)

- Negli *Analitici primi* (due libri) Aristotele definisce il *sillogismo* e ne spiega le caratteristiche.

Spiega, precisamente, che il ***sillogismo*** è un discorso nel quale da due proposizioni (una detta *premessa maggiore* e l'altra *premessa minore*), aventi un termine in comune (detto *termine medio*, nel seguito sarà indicato con B), segue una terza proposizione (*conclusione*) nella quale il termine medio non figura più, mentre vi figurano il *termine maggiore* (sarà indicato con A), che figurava pure nella premessa maggiore e il *termine minore* (sarà indicato con C) che figurava nella premessa minore.

[1] I simboli A, E, I, O, con cui si indicano le quattro tipologie di proposizioni, sono state introdotte nel Medioevo.

Nella prima figura di sillogismo aristotelico il termine medio compare come "soggetto" (*sub*) nella premessa maggiore e come "predicato" (*prae*) nella premessa minore. È riportata qui appresso con a fianco il più classico degli esempi di questa figura. Ogni sillogismo di questo tipo si denomina sillogismo *sub-prae*.

BA (premessa maggiore)	Tutti gli uomini sono mortali
CB (premessa minore)	Socrate è un uomo
CA (conclusione)	Socrate è mortale

Nella prima di queste altre due figure il termine medio è "predicato" in entrambe le premesse, mentre nella seconda è "soggetto" in entrambe le premesse:

AB (premessa maggiore)	BA (premessa maggiore)
CB (premessa minore)	BC (premessa minore)
CA (conclusione)	CA (conclusione)

Ogni sillogismo del primo di questi due tipi è denominato sillogismo *prae-prae*; ogni sillogismo del secondo tipo è detto sillogismo *sub-sub*.

Oltre a queste tre forme di sillogismo, dovute appunto ad Aristotele, ce n'è una quarta: c'è chi ne attribuisce la paternità a Galeno di Pergamo (II sec. d.C.), filosofo ma forse più conosciuto come medico, c'è chi invece sostiene che sia stata proposta nel Medioevo all'epoca della Filosofia Scolastica, in particolare dal portoghese Piero Ispano[2] (XIII sec.). In questa quarta figura, denominata sillogismo *prae-sub*, il termine medio è "predicato" nella premessa maggiore e "soggetto" nella minore:

AB (premessa maggiore)
BC (premessa minore)
—
CA (conclusione)

In conclusione, combinando in tutti i modi possibili le 4 figure illustrate sopra (e che differiscono dalla posizione del termine medio) con le 4 tipologie di proposizioni elencate da Aristotele, sembra che si possano ottenere complessivamente $4^4=256$ schemi di ragionamento. Bisogna tenere presente, tuttavia, una regola basilare del sillogismo aristotelico, secondo la quale **almeno una delle premesse è una proposizione universale**. In virtù di questa regola, si devono escludere $2^4=64$ figure, per cui i sillogismi da prendere in esame sono 192, ma di essi solo 19 sono quelli corretti[3]: 4 provengono dallo schema *sub-prae*, 4 dallo schema *prae-prae*, 6 dallo schema *sub-sub*, 5 dallo schema *prae-sub*.

Ora, non intendo certamente dilungarmi sui 192 schemi per stabilire quali sono corretti e quali invece non lo sono. Chi è interessato lo può fare da sé. Nondimeno qualcosa mi sento di dire, se non altro come esemplificazione, in particolare con riferimento ai seguenti 4 schemi:

I)	II)	III)	IV)
ogni B è A	ogni A è B	ogni B è A	ogni A è B
ogni C è B	ogni C è B	ogni B è C	ogni B è C
qualche C è A	qualche C è A	qualche C è A	qualche C è A

Ebbene, gli schemi I), III), IV) sono figure di ragionamento corrette mentre lo schema II) non lo è.

Per noi è facile dimostrarlo: basta riferirsi alla rappresentazione di Eulero-Venn; ma forse non era così semplice per gli Antichi. In effetti, utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn (figure 1-4), se A, B, C rappresentano degli insiemi generici e x un generico elemento di C ($x \in C$), si evince quanto segue:

- dalla figura 1: ($B \subset A$ e $C \subset B$) $\Rightarrow$ ogni $x \in A$ e di conseguenza: qualche $x \in A$;
- dalla figura 2: ($A \subset B$ e $C \subset B$) $\Rightarrow$ qualche $x \in A$, ma anche: ($A \subset B$ e $C \subset B$) $\Rightarrow$ ogni $x \notin A$;
- dalla figura 3: ($B \subset A$ e $B \subset C$) $\Rightarrow$ qualche $x \in A$, (e anche: non ogni $x \in A$);
- dalla figura 4: ($A \subset B$ e $B \subset C$) $\Rightarrow$ qualche $x \in A$, (e anche: non ogni $x \in A$).

---

[2] Il suo vero nome era Pedro Julião (detto anche Petrus Iuliani o Pietro di Giuliano) e fu anche papa per 18 mesi nel 1276 con il nome di Giovanni XXI. Dante ne loda la figura nel Paradiso (canto XII, versi 134-135: «*Pietro Ispano, lo qual giù luce in dodici libelli*», con riferimento alla sua opera *Summulae logicales* in 12 libri per l'appunto.

[3] Un sillogismo è *corretto* quando le premesse sono vere e vera è la conclusione.

Vale a dire che, mentre nel primo e negli ultimi due casi, la conclusione che segue dalle premesse è vera, nel secondo caso le premesse non consentono di determinare la conclusione, che può essere vera o falsa.

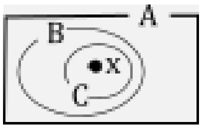

figura 1

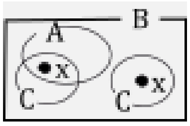

figura 2

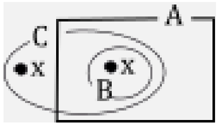

figura 3

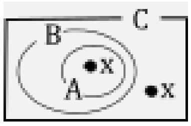

figura 4

Qualche esempio a maggior chiarimento.

- Dallo schema I:

Ogni B è A: Ogni uomo è mortale
Ogni C è B: Ogni greco è uomo

Qualche C è A: Qualche greco (per es.: Socrate) è mortale.

Conclusione vera e ragionamento corretto. In realtà, dalle premesse segue addirittura che “Ogni greco è mortale” e quindi è vero che “Qualche greco è mortale”.

- Dallo schema II:

Ogni A è B: Ogni italiano è europeo
Ogni C è B: Ogni siciliano è europeo

Qualche C è A: Qualche siciliano (per es.: Leonardo Sciascia) è italiano.

Conclusione vera, ma lo schema di ragionamento non è corretto. Basta un contro-esempio, come il seguente, per provarlo.

Ogni A è B: Ogni francese è europeo
Ogni C è B: Ogni siciliano è europeo

Qualche C è A: Qualche siciliano è francese. (FALSO)

- Dallo schema III:

Ogni B è A: Ogni greco è europeo
Ogni B è C: Ogni greco è mortale

Qualche C è A: Qualche mortale è greco (es.: Socrate).

Conclusione vera e ragionamento corretto, anche se è pure vero che “Qualche mortale non è Greco”.

- Dallo schema IV:

Ogni A è B: Ogni siciliano è italiano
Ogni B è C: Ogni italiano è europeo

Qualche C è A: Qualche europeo è siciliano (es.: Leonardo Sciascia).

Conclusione vera e ragionamento corretto, anche se è pure vero che “Qualche europeo non è siciliano”.

- Aristotele sostiene poi che una certa conclusione può costituire una premessa di un altro sillogismo e dunque questa premessa è una proposizione “dimostrata”. Ma – afferma ancora negli *Analitici secondi* (due libri) – questo non è vero per tutte le premesse, nel senso che ci sono premesse che devono essere accettate senza dimostrazione, perché sono “evidenti di per sé”: sono i *principi primi della scienza* (o *assiomi*).

Inoltre, continua Aristotele, bisogna accettare nelle concatenazioni sillogistiche tre principi fondamentali della logica, essi pure evidenti di per sé:

- il *principio di identità*: ogni ente è uguale a se stesso (A è uguale ad A);
- il *principio di non contraddizione*: un ente non può avere un dato attributo e contemporaneamente non averlo (A è uguale a B e non può essere A è uguale a non B);
- il *principio del terzo escluso*: un ente ha un dato attributo oppure non ce l’ha, ma non è possibile una terza eventualità (*tertium non datur*) (A è uguale a B *aut* A è uguale a non B).

In realtà, Aristotele, oltre alla teoria generale del sillogismo (trattata negli *Analitici primi*) e alla teoria della dimostrazione (*Analitici secondi*), si è occupato della teoria del cosiddetto sillogismo dialettico (*Topici*) e della teoria del sillogismo sofistico (*Elenchi sofistici*). Ma noi non ce ne occupiamo.

L'autorità di Aristotele, e non solo nel campo della logica, rimase indiscussa per lungo tempo (*ipse dixit*!).

Addirittura il grande Immanuel Kant (1724-1804), nella Prefazione alla 2ª edizione della *Critica della Ragion Pura*, sosteneva che:

« […] a cominciare da Aristotele non ha dovuto fare alcun passo indietro […] e fino ad oggi la logica non ha potuto fare un solo passo avanti di modo che secondo ogni apparenza essa è da ritenersi come chiusa e completa ».

Questo, per la verità, non era del tutto vero già ai tempi di Kant, ove si considerino alcuni interessanti contributi di Leibniz, che Kant certamente non ignorava, ma soprattutto era sbagliato come previsione. In realtà la Logica si sarebbe rivelata disciplina tutt'altro che chiusa. Ed i risultati ai quali gli studiosi sarebbero pervenuti avrebbero superato abbondantemente il genio di Aristotele.

Ma quello che afferma Kant non era vero neppure se riferito ai risultati dei Greci dell'età ellenistica: basti pensare ai contributi delle scuole Megarica e Stoica. Contributi che, se fossero stati colti nella loro pienezza, avrebbero anticipato di oltre 2.000 anni quei risultati che si sarebbero ottenuti solo nell'Ottocento. A scusante di Kant c'è il fatto che la logica stoica era caduta nel dimenticatoio e riscoperta e rivalutata solo nel XX secolo dal logico polacco Jan Łukasiewicz (1878-1956). Quando, però, i risultati dei logici occidentali l'avevano largamente superata.

E, tutto sommato, l'affermazione di Kant non era vera nemmeno se riferita alla logica medioevale, almeno quella sviluppatasi nel corso dei secoli XIII e XIV.

Ma procediamo con ordine.

3. Le scuole Megarica e Stoica.

La logica megarica ha il suo iniziatore in **Euclide** di Megara [4] (attivo nel 400 a.C.), discepolo di Socrate. Sono componenti della scuola di Megara, un'antica città situata a circa 30 km da Atene: **Eubulide** di Mileto (vissuto nel IV sec. a.C.), discepolo di Euclide di Megara, **Diodoro Crono** (vissuto nel IV sec. a.C.), nativo di Jaso nella Caria (un'antica regione dell'Asia minore), e il suo allievo **Filone** di Megara.

La logica megarica non si sviluppò in modo sistematico e pur tuttavia ottenne risultati di un certo rilievo. Ne cito un paio.

- Ad Eubulide si fanno risalire alcune famose antinomie. Celebre è quella cosiddetta del mentitore, anche se è enunciata in molte versioni, che per la verità non sempre sono delle antinomie.

Certamente non è una antinomia la versione attribuita ad **Epimenide**, filosofo e poeta greco di Cnosso, nell'isola di Creta, contemporaneo di Solone, vissuto intorno al 600 a.C.

L'antinomia sarebbe nella seguente frase: «Dice Epimenide: "Tutti i cretesi sono bugiardi"».

Questo il ragionamento per spiegare che si tratta di un'antinomia: se Epimenide è sincero, allora "è vero che tutti i cretesi sono bugiardi" e dunque anche Epimenide, cretese, è bugiardo; se invece Epimenide mente, allora "è falso che tutti i cretesi sono bugiardi", per cui "tutti i cretesi sono sinceri" e quindi anche Epimenide è sincero.

Ecco, dunque, quale sarebbe l'antinomia: se Epimenide è sincero allora è bugiardo e se è bugiardo allora è sincero.

Ribadisco che, in realtà, non c'è antinomia. Il fatto è che la seconda parte del ragionamento precedente è errata, in quanto l'affermazione "è falso che tutti i cretesi sono bugiardi" non equivale a dire che "tutti i cretesi sono sinceri" ma che "alcuni cretesi sono sinceri", affermazione che, a sua volta, implica due possibilità: "alcuni cretesi sono sinceri e altri sono bugiardi" oppure "tutti i cretesi sono sinceri". Nel primo caso, tra i cretesi bugiardi potrebbe esserci proprio Epimenide, per cui l'antinomia non esiste e la conclusione è semplicemente che Epimenide è bugiardo e la sua affermazione è falsa.

Qui prendo in esame una versione che, a differenza di quella di Epimenide, è realmente un'antinomia ma certamente non è quella originaria di Eubulide.

Si consideri la seguente proposizione "P: la proposizione P è falsa".

[4] A volte è stato confuso con Euclide di Alessandria (vissuto invece intorno al 300 a.C.), autore degli *Elementi*.

Ebbene, se P è vera allora è vero che P è falsa. Se, al contrario, P è falsa allora non è vero che P è falsa, quindi P è vera. Insomma: se P è vera allora P è falsa e se P è falsa allora P è vera.

Un'antinomia, per l'appunto.

- A Filone è attribuita l'analisi dell'implicazione "*se p allora q*", considerata falsa solo nel caso in cui p è vera e q è falsa. Esattamente come facciamo noi al giorno d'oggi.
- Un allievo di Filone, **Zenone** di Cizio (morto nel 264 a.C.) è considerato il fondatore della scuola Stoica, che vede come suo maggiore rappresentante **Crisippo** di Soli, in Cilicia (III sec. a.C.).

La logica stoica è molto vicina a quella oggi in uso. In particolare studia i valori di verità delle proposizioni composte per mezzo di connettivi del tutto simili ai nostri e con lo stesso identico significato:

congiunzione "*et*", disgiunzione esclusiva "*aut*", implicazione "*se … allora*", negazione "*non*".

Crisippo stabilisce inoltre cinque schemi di inferenza, detti "*indimostrabili*" poiché per l'appunto non si dimostrano. Crisippo giudica che non abbiano bisogno di dimostrazione perché sono auto-evidenti. Questi schemi si possono riassumere in forme di ragionamento come le seguenti, dove nella prima colonna è la formulazione "retorica" e nella seconda quella "simbolica" al modo nostro:

1) Se il primo, il secondo / il primo / il secondo — $\dfrac{p \rightarrow q \quad p}{q}$

2) Se il primo, il secondo / non il secondo / non il primo — $\dfrac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$

3) Non il primo e il secondo / il primo / non il secondo — $\dfrac{\neg(p \wedge q) \quad p}{\neg q}$

4) O il primo o il secondo / il primo / non il secondo — $\dfrac{p \text{ aut } q \quad p}{\neg q}$

5) O il primo o il secondo / non il secondo / il primo — $\dfrac{p \text{ aut } q \quad \neg q}{p}$

Gli schemi 1) e 2) sono denominati rispettivamente *modus ponens* e *modus tollens.*

Dagli schemi suddetti, secondo gli Stoici, è possibile dedurre ogni forma di ragionamento ipotetico.

Gli schemi sono giunti a noi attraverso lo storico greco Diogene Laerzio (II-III sec. d.C.) e il filosofo scettico Sesto Empirico, vissuto, pare, a Tarso nel III sec. d.C..

La logica Stoica fu aspramente contrastata dai seguaci di Aristotele. Forse per questo il modo di ragionare degli Stoici all'epoca non ebbe fortuna e la Logica che s'impose fu quella aristotelica, mentre, come ho già detto, la logica Stoica fu messa da parte e caduta nel dimenticatoio.

Per una moderna logica proposizionale bisogna aspettare l'Ottocento e l'opera dapprima di Boole e poi di Frege.

4. La logica medioevale.

La logica medioevale è essenzialmente aristotelica e si sviluppa in due fasi distinte: la prima, a partire dal VI secolo, prevalentemente sulla base delle traduzioni delle due sole opere dell'*Organon* che a quell'epoca erano conosciute e, in particolare, l'*Interpretazione*; la seconda fase, a partire dal XII secolo, in seguito alle traduzioni dall'arabo delle altre quattro opere dell'*Organon* e, in particolare, degli *Analitici Primi* e *Secondi*.

Le prime due opere che compongono l'*Organon* (*Categorie, Interpretazione*) furono tradotte in latino e commentate nel VI secolo da Severino Boezio, da alcuni ritenuto uno dei fondatori della Scolastica, termine con cui veniva definita la filosofia cristiana medioevale. Le altre quattro opere (*Analitici primi, Analitici secondi, Topici, Elenchi sofistici*), delle quali circolavano commenti dello stesso Boezio, rimasero sconosciute in Occidente fino al XII secolo, quando comparvero le prime traduzioni dall'arabo in latino. Una traduzione di tutte e sei le opere dell'*Organon* dal testo originale greco in latino si ebbe nel XIII secolo per merito del fiammingo Guglielmo di Moerbeke, frate domenicano, che fu anche arcivescovo di Corinto.

La logica che venne sviluppata nella seconda fase va, seppure in minima parte, oltre i risultati di Aristotele. Essa fece registrare il suo massimo splendore fra il XIII e il XIV secolo e, tra l'altro, ritrovò anche risultati già ottenuti dagli Stoici e ne anticipò altri che sarebbero divenuti più familiari nell'Ottocento.

Fra i maggiori rappresentati della logica medioevale cito, ma non sono i soli, Giovanni di Cornovaglia (detto Pseudo-Scoto), Guglielmo di Occam, Giovanni Buridano e Alberto di Sassonia.

Occorre dire che, a partire dal secolo VIII, in Europa la Logica fu studiata nelle scuole, gestite pressoché esclusivamente da religiosi, e, a partire dal XII secolo, anche nelle università dopo la loro nascita (5). E fu proprio in queste istituzioni che, sotto forma di *dispute*, la Logica fece registrare un certo progresso.

Sono due i risultati che mi piace sottolineare.

- Il primo riguarda una elaborata teoria dei quantificatori "*per ogni*" ed "*esiste almeno un*".

I logici medioevali erano consapevoli delle seguenti equivalenze:

- "esiste almeno un x che verifica la proprietà A" equivale a "non ogni x verifica non A" [nel nostro simbolismo: $\exists x, A(x) \equiv \neg\forall x, \neg A(x)$];
- "ogni x verifica la proprietà A" equivale a "non esiste alcun x che verifica non A" [nel nostro simbolismo: $\forall x, A(x) \equiv \neg\exists x, \neg A(x)$].

- Il secondo risultato è un teorema, noto come teorema dello Pseudo-Scoto, il cui enunciato è il seguente:

«*Da una qualsiasi proposizione che implichi una contraddizione formale segue una qualsiasi altra proposizione secondo una conseguenza formale*».

In altri termini, dalla contraddizione $A \wedge \overline{A}$ segue "formalmente" una qualsiasi proposizione B.

Nella dimostrazione lo Pseudo-Scoto non usa alcun simbolismo, ma si serve del linguaggio comune e utilizza implicitamente le tabelle di verità dei connettivi $\wedge$ e $\vee$.

Una dimostrazione del teorema, in un linguaggio simbolico, che ricalca la dimostrazione "retorica" dello Pseudo-Scoto, potrebbe essere quella che si sviluppa nei seguenti 4 passi:

$$1)\ A \wedge \overline{A} \rightarrow A,\quad 2)\ A \wedge \overline{A} \rightarrow \overline{A},\quad 3)\ A \rightarrow A \vee B;\quad 4)\ (A \vee B) \wedge \overline{A} \rightarrow B.$$

5. La formalizzazione della Logica.

La logica medioevale, nel corso del secolo XV, conobbe una fase di decadenza e di fatto esaurì il suo compito. Nei tre secoli successivi la Logica non fece registrare significativi passi in avanti. Vanno segnalati, nondimeno, la critica al sillogismo, mossa dal filosofo inglese Francis Bacon (italianizzato Francesco Bacone, 1561-1626), e un paio di tentativi del filosofo e matematico tedesco Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), consistenti, il primo, in una rappresentazione grafica delle figure di ragionamento, l'altro, in verità malriuscito, in una assiomatizzazione dei sillogismi.

Comunque sia, alla fine del Settecento la logica si identificava sostanzialmente nella dottrina aristotelica del sillogismo. Il che, come ho accennato qualche rigo indietro, faceva dire a Kant che, in fatto di logica, forse non c'era null'altro da scoprire dopo Aristotele. Era il 1787.

Previsione quanto mai sballata. Tra non molto, infatti, sarebbero iniziati veri e propri fuochi d'artificio.

Nel 1847 compare un opuscolo del matematico e logico inglese **George Boole** (1815-1864), dal titolo *Mathematical Analysis of Logic* (*Analisi Matematica della Logica*). In esso figurano il legame della Logica con la Matematica e la preventiva necessità di una formalizzazione.

Lo studio di Boole inaugura quella che sarebbe stata chiamata "logica matematica" (o "logica simbolica") e presenta novità così rilevanti da suscitare l'ammirazione e l'interesse del matematico e logico britannico, suo contemporaneo, **August De Morgan** (1806-1871), che nello stesso anno aveva pubblicato la sua *Formal Logic* (*Logica formale*).

Il riconoscimento di De Morgan, di cui Boole non solo era grande amico ma anche estimatore, incoraggiò quest'ultimo nel suo lavoro di ricerca, che egli sviluppò e perfezionò fino alla pubblicazione, nel 1854, della sua opera principale: *Investigation of the Laws of Thought* (*Esame delle leggi del pensiero*).

---

[5] La prima ed unica università sorta nel secolo XI fu l'Università di Bologna, fondata nell'anno 1088.

Lo scopo di Boole, per sua stessa dichiarazione, è quello di studiare le leggi fondamentali che stanno alla base del ragionamento, di esprimerle nel linguaggio del calcolo, cioè di formalizzarle, insomma di elaborare una vera e propria "algebra della logica" e di costruire su questa base un metodo di indagine da applicare alle varie branche della matematica.

Egli portò a termine il compito che si era prefisso, fondando appunto la logica simbolica, e il suo metodo di lavoro, ancorché modificato e perfezionato nel tempo, ha permesso alla Logica quei progressi che non ci sarebbero stati se fossero rimasti a disposizione i soli metodi verbali degli antichi studiosi.

Al di là dei giudizi che se ne possono dare e che non sempre sono stati positivi, è innegabile che nasce con Boole quella che oggi chiamiamo *logica delle proposizioni*.

La *logica dei predicati* fu introdotta nella seconda metà dell'Ottocento dal filosofo e logico statunitense **Charles Sanders Peirce** (1839-1914), ma si deve a Frege il primo calcolo logico dei predicati.

Dopo di ciò la logica aristotelica sarebbe stata studiata come semplice reperto storico.

6. La creazione di Cantor.

Se è vero che Boole la inaugura, in realtà la logica matematica comincia ad affermarsi con la teoria degli insiemi, creata dal matematico tedesco **Georg Cantor** (1845-1918), considerato uno dei geni creatori della Matematica. Sulle motivazioni che lo portarono alla creazione della teoria degli insiemi, riporto un illuminante pensiero tratto da [1, pag. 11]:

«*È importante sottolineare che Cantor è giunto alla teoria degli insiemi partendo da un problema specifico dell'analisi. Egli non stava cercando di definire i numeri naturali né qualche altro problema per risolvere il quale, da allora, si fa uso della teoria degli insiemi. La sua motivazione originaria fu l'analisi degli insiemi infiniti dei numeri reali.*»

Cantor, sulla scia degli studi di Bolzano e Dedekind, si rese conto che «*per trattare adeguatamente derivate e integrali si dovevano considerare insiemi infiniti e bisognava considerarli in modo molto preciso: non ci fu modo di evitare gli insiemi infiniti. Ecco l'origine della teoria degli insiemi.*»

Questa teoria, nata dunque per esigenze legate all'Analisi Matematica, finì per diventare una teoria autonoma e la sua creazione fu uno degli eventi che cambiò radicalmente il pensiero matematico. Notevole fu il suo influsso sull'insegnamento della matematica verso la metà del secolo scorso; anche in Italia, sebbene in misura minore rispetto ad altri paesi.

La teoria degli insiemi fu fondata tra il 1878 e il 1884 con una serie di sei memorie pubblicate da Cantor sulla rivista *Mathematische Annalen*.

7. Aritmetica e logica.

Nell'ambito del lavoro mirato ad una fondazione dei naturali, condotto dall'italiano **Giuseppe Peano** (1858-1932) e dal tedesco **Gottlob Frege** (1848-1925), si sviluppa una Logica che fa da supporto al tentativo di costruzione dei numeri naturali.

Peano costruì i numeri naturali assumendo tre concetti primitivi e cinque assiomi e utilizzò gli assiomi della logica come supporto. Detto per inciso, egli non riuscì a dimostrare la coerenza di tali assiomi [(6)], ma solo la loro indipendenza.

I suoi risultati comparvero una prima volta nel 1889 nell'opera *Arithmetices principia nova methodo exposita*: i postulati sono espressi con un simbolismo che è in gran parte usato ancor oggi. Successivamente, nel 1894, egli ripubblicò quei risultati, con diverse modificazioni, nel *Formulario di matematica*.

Frege cercò di fondare la teoria dei naturali non su base assiomatica, cosa che non approvava, ma poggiandola sulla teoria degli insiemi. Su questa teoria poggiò pure l'apparato logico che andava costruendo e che, oltre alla *logica proposizionale*, comprendeva il *calcolo dei predicati*. Il complesso che ne deriva è un

---

[6] Il problema se fosse possibile "dimostrare la coerenza del sistema dei naturali" fu posto da Hilbert, al congresso di matematica di Parigi del 1900, come 2° di 23 problemi i quali, secondo lui, avrebbero maggiormente impegnato i matematici negli anni successivi.

insieme di regole, tutte esplicitate a priori, per mezzo delle quali ogni procedimento dimostrativo è condotto come un vero e proprio calcolo, in cui si prescinde dal significato delle formule che vi intervengono (il cosiddetto *aspetto semantico*), contando soltanto il loro *aspetto sintattico*. Frege pubblicò le sue prime riflessioni nel 1879 in uno studio dal lungo titolo: *Beriffsschrift-Eine der arithmetischen nachgebildete Formalsprache des reine Denkes* (*Ideografia-linguaggio del pensiero puro formalizzato ad imitazione di quello aritmetico*), citato di solito da noi col nome di *Ideografia*.

Approfondì in seguito questo studio e lo ampliò pubblicando nel 1884 l'opera *Die Grundlagen der Arithmetik* (*I fondamenti dell'aritmetica*). Opera che, però, non ebbe grande risonanza all'epoca, anzi fu proprio snobbata, e questo lo deluse molto. Frege, tuttavia, sviluppò ulteriormente le proprie idee e, dopo 9 anni, espose i risultati cui era giunto in due volumi dal titolo *Grudgesetze der Arithmetik* (*Leggi fondamentali dell'aritmetica*). Il primo di questi uscì nel 1893 e fece la stessa fine dei *Grundlagen*, tanto da indurre Frege a ritardare di circa 10 anni la pubblicazione del 2° volume.

Ma una nuova e più cocente delusione lo attendeva: il giovane trentenne Bertrand Russell (1872-1970), in una lettera indirizzatagli il 16 giugno 1902 fece notare a Frege come l'opera fosse inquinata da una contraddizione insanabile. L'effetto su Frege fu disastroso, considerato per giunta che più volte egli aveva attaccato sarcasticamente per i loro vistosi errori quei matematici che si erano occupati dei fondamenti dell'aritmetica. Il suo stato d'animo è riscontrabile chiaramente nella sua nota conclusiva al 2° volume dei *Grundgesetze*:

«*A uno scrittore di scienza ben poco può giungere più sgradito del fatto che sia scosso uno dei fondamenti della sua costruzione dopo aver completato il lavoro. Sono stato messo in questa condizione da una lettera del signor Bertrand Russell quando la stampa di questo volume stava per essere finita*».

Frege fece qualche tentativo per superare la contraddizione segnalata da Russell, ma senza riuscirvi, per cui dichiarò, senza mezzi termini, che i suoi sforzi mirati a chiarire i fondamenti dell'aritmetica si erano risolti in un completo fallimento. E non pubblicò più nulla.

Nonostante questa *defaillance*, l'opera di Frege è imponente e non sono pochi quelli che lo annoverano fra i maggiori rappresentanti della logica matematica se non addirittura il padre della moderna logica matematica.

Mi soffermo brevemente sulla contraddizione rilevata da Russell.

La teoria di Frege – che, ricordo, era basata sulla teoria degli insiemi di Cantor – poggiava sull'idea intuitiva di insieme quale "collezione di oggetti esistenti o solo pensabili".

Consideriamo allora l'insieme S di tutti gli insiemi cosiddetti *normali*, cioè tali che non siano elementi di se stessi. Quest'insieme deve contenere molti elementi. Per esempio:

- l'insieme U degli uomini è un suo elemento, poiché evidentemente l'insieme U non è un uomo;
- l'insieme T dei triangoli è un suo elemento, dal momento che l'insieme T non è un triangolo;
- eccetera.

Ora, se quest'insieme S è determinato, si deve poter stabilire se un qualunque oggetto, esistente o solo pensato, è o non è un suo elemento. In particolare si deve poter stabilire se S contiene se stesso come elemento (per cui S *non è normale*) o se S non contiene se stesso come elemento (per cui S *è normale*).

Ragioniamo:

- se S è normale, per cui se $S \notin S$, allora vuol dire che S è un elemento dell'insieme S degli insiemi normali, e per questo $S \in S$;

- d'altronde, se S non è normale, per cui $S \in S$, allora vuol dire che S non è un elemento dell'insieme S degli insiemi normali, e per questo $S \notin S$.

In conclusione:

$$(S \notin S \rightarrow S \in S \quad \text{e} \quad S \in S \rightarrow S \notin S) \qquad \text{ovvero:} \quad S \notin S \leftrightarrow S \in S$$

Si tratta chiaramente di una contraddizione.

Questa contraddizione passò alla storia col nome di **antinomia di Russell**, benché in realtà fosse già stata scoperta da **Ernst Zermelo** (1871-1953), matematico e filosofo tedesco. Ma soprattutto sgretolò quella che nell'intendimento di Frege doveva essere la "salda roccia" su cui costruire l'intero edificio matematico e, soprattutto, costrinse i matematici a non fidarsi di una definizione "ingenua" del concetto di "insieme" ma di seguire altre strade. Cosa che fece lo stesso Zermelo, il quale elaborò nel 1908 una teoria assiomatica degli insiemi. I suoi studi – assieme a quelli fatti nel 1922 da **Abraham Fraenkel** (1891-1965), matematico tedesco naturalizzato israeliano – furono ripresi dal matematico norvegese **Thoralf Skolem** (1887-1963) ed ebbero come esito quella che oggigiorno è conosciuta come ***teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel***.

Ritornando a Frege, egli in realtà non poteva risolvere un problema ché di fatto era insolubile. Cosa che, però, egli non sapeva. Vediamone velocemente i contorni.

Anzitutto un breve riassunto: Peano non era riuscito a dimostrare la coerenza del sistema assiomatico su cui basava la costruzione dei naturali; Frege era incappato in una contraddizione nel tentativo di dimostrare la coerenza del sistema logico che aveva costruito. Sono due aspetti di uno stesso problema, affrontato e risolto nel 1931, seppure in modo sorprendente, da **Kurt Gödel** (1906-1978), un matematico e logico austriaco emigrato negli USA. Egli dimostrò due teoremi che avrebbero cambiato l'indirizzo della ricerca matematica.

Il primo teorema, noto come *primo teorema d'incompletezza*, recita: «*Se T è una teoria coerente allora esiste un enunciato universale vero ma non dimostrabile in T*».

Da questo teorema discende una conseguenza stupefacente: o la teoria T è contraddittoria o verità e dimostrazione sono concetti distinti. Se, per ovvi motivi, escludiamo la prima possibilità, rimane in piedi solo la seconda. Questo implica che un approccio assiomatico ad una teoria dà luogo ad una serie di proposizioni che però non esauriscono il dominio della verità di quella teoria: esistono cioè proposizioni vere che la teoria non può dimostrare.

Il secondo teorema, conosciuto come *secondo teorema d'incompletezza* (o *teorema d'indimostrabilità*), recita: «*Se T è una teoria coerente allora l'enunciato "T è coerente" non è dimostrabile in T*».

In particolare: «*Se sono raggruppati in un unico sistema P gli assiomi di Peano e quelli della logica, allora – supposto che P sia coerente – risulta impossibile dimostrare questa coerenza senza uscire da P*».

Come conseguenza delle scoperte di Gödel, sorse la consapevolezza nei matematici che bisogna accettare l'esistenza di teorie in cui: a) ci sono proposizioni decidibili vere che però non possono essere dimostrate all'interno della teoria; b) ci sono proposizioni indecidibili, delle quali cioè non si può concludere né che sono vere né che sono false.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. N. CROSSLEY e altri, *Che cos'è la logica matematica*? Torino, Boringhieri, 1979.

[2] A. GIAMBO' – R. GIAMBO', *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.

[3] W. S. HATCHER, *Fondamenti della matematica*, Torino, Boringhieri, 1978.

[4] S. MARACCHIA, *Breve storia della logica antica*, Roma, Euroma – La Goliardica, 1987.

[5] B. RUSSELL, *I principi della matematica*, Roma, Newton Compton, 1983.