Miss Marple e i tredici problemi (di matematica)
Le soluzioni ai problemi 1-5

Problemi risolti.

1. "Destinazione Polo"
"Un pilota vola 100 km verso sud, poi 100 km verso est, poi 100 km verso nord, e si ritrova esattamente al punto di partenza. Da dove era partito?"
Supponiamo che il pilota parta da un punto qualsiasi sulla circonferenza che si trova a circa 116 km ($100 + \frac{50}{\pi} = 115{,}915\ km$) dal Polo Sud, cioè a Lat 88°57' S, nell'Antartide. Allora vola 100 km verso sud.
Ora quando viaggia 100 km verso est, avrà compiuto un giro completo intorno al polo ($2\pi \cdot \frac{50}{\pi} = 100\ km$). Dunque quando viaggia 100 km verso nord deve ritornare al punto di partenza.
Ma non è ancora tutto: il pilota può partire da un punto così vicino al Polo Sud ($100 + \frac{50}{2\pi}\ km$) da compiere, quando vola 100 km verso est, due giri intorno al polo. Questo introduce una nuova circonferenza, ogni punto della quale è una soluzione del problema originario. E così via: i punti di partenza che risolvono il problema giacciono su un insieme infinito di circonferenze, aventi tutte il centro al Polo Sud, e un raggio di $100 + \frac{50}{n\pi}\ km$, che si avvicina a 100 km (Lat 89°06' S) come limite.

2. "Il foro nella sfera"
"È stato praticato un foro cilindrico lungo 6 cm che passa proprio per il centro di una sfera solida. Qual è il volume rimanente della sfera?"
Senza ricorrere all'analisi matematica, il problema può essere risolto in questo modo. Chiamiamo R il raggio della sfera: il raggio del foro cilindrico sarà allora $r = \sqrt{R^2 - 9}$ e l'altezza del segmento sferico a una base a ogni estremità del cilindro sarà $h = R - 3$.
Il volume della sfera sarà $\frac{4}{3}\pi R^3$ e quello del cilindro $6\pi(R^2 - 9)$.
Il volume del segmento sferico a una base si ottiene con la formula seguente, in cui h è la sua altezza e R il raggio della sfera:
$$V_{s.s.} = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h);$$
si ha così:
$$V_{s.s.} = \frac{1}{3}\pi\,(R-3)^2\,[3R - (R-3)] = \frac{1}{3}\pi\,(R-3)^2\,(2R+3).$$
Il volume che rimane è dato dal volume della sfera meno il volume del cilindro e meno due volte il volume del segmento sferico a una base. Il risultato, dopo le semplificazioni, è:
$$V = 36\pi = \tfrac{4}{3}\pi 3^3 cm^3.$$
Il volume rimanente della sfera è sempre uguale al volume di una sfera solida il cui diametro è uguale alla lunghezza del foro.

3. "I quattro gattini"
"Due gatti siamesi si sono accoppiati ed ora aspettano quattro gattini: il sig. Gatto vorrebbe pronosticare quanti siano i maschi e quante le femmine".

Egli fa questo ragionamento: è improbabile che siano tutti e quattro maschi o tutte femmine; poiché per ogni gattino ci sono 50 probabilità su 100 che sia o maschio o femmina, la cosa più probabile è che ci siano due maschi e due femmine.
È corretto il ragionamento del sig. Gatto? Proviamo a verificare la sua teoria. Usando M per maschio e F per femmina, elenchiamo tutti i casi ugualmente possibili (disposizioni con ripetizione $D^*_{2,4} = 2^4 = 16$):

MMMM	MMMF	MMFM	MFMM
FMMM	MMFF	MFMF	FMMF
MFFM	FMFM	FFMM	MFFF
FMFF	FFMF	FFFM	FFFF.

Solo in due dei casi tutti i gattini sono dello stesso sesso. La probabilità di questo evento è quindi pari a 2/16, ossia 1/8.
Controlliamo ora la distribuzione 2-2, quella che il sig. Gatto riteneva più probabile. Si presenta 6 volte, quindi la probabilità è 6/16, ossia 3/8.
Consideriamo infine la distribuzione 3-1: questa si presenta in 8 casi e la sua probabilità è 8/16, ossia ½. La previsione del sig. Gatto era sbagliata: la distribuzione più probabile non è 2-2, ma 3-1.
Nasce ora la curiosità di conoscere le probabilità delle diverse distribuzioni di sessi in famiglie di 5 e 6 figli. Invece di elencare tutti i casi ugualmente possibili ($2^5 = 32$ nel primo caso e $2^6 = 64$ nel secondo), calcoleremo le probabilità con la formula della distribuzione binomiale:

$$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Per una famiglia di 5 figli, si ha:

$$P_2 = P_3 = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}$$

e quindi la distribuzione più probabile è 3-2, con probabilità $P_2 + P_3 = \frac{5}{8} = 62{,}5\%$.
Per una famiglia di 6 figli, si ha:

$$P_2 = P_4 = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}$$

e la distribuzione più probabile è 4-2, con probabilità

$$P_2 + P_4 = \frac{15}{32} = 46{,}875\%.$$

Per una famiglia di 7 figli, la distribuzione più probabile è 4-3, con probabilità 35/64 = 54,6875%.

4. "Il numero di matricola della recluta"
"Il capitano domanda ad una recluta quale sia il suo numero di matricola; quello, per metterlo in difficoltà, risponde che il suo numero è uguale alla semisomma dei numeri formati con le disposizioni semplici delle sue tre cifre, due a due. Qual è il numero di matricola della recluta?"
Tale numero, essendo di tre cifre, sarà del tipo abc, ovvero:

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c.$$

I numeri formati con le disposizioni semplici delle sue tre cifre, due a due, sono 6 ($D_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$) e precisamente: ab, ba, ac, ca, bc, cb e la loro somma risulta:

$$a \cdot 10 + b + b \cdot 10 + a + a \cdot 10 + c + c \cdot 10 + a + b \cdot 10 + c + c \cdot 10 + b =$$
$$= 22 \cdot (a + b + c).$$

Avremo quindi:

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 11 \cdot (a + b + c),$$

ovvero:

$$a \cdot 89 = c \cdot 10 + b.$$

Siccome $c \cdot 10 + b$ è di due sole cifre, a non può essere che 1; avremo allora:

$$89 = c \cdot 10 + b,$$

cioè:

$$8 \cdot 10 + 9 = c \cdot 10 + b,$$

da cui necessariamente $c = 8$ e $b = 9$, ed il numero cercato è 198.

5. "Il massimo profitto di un club sportivo"

"La direzione di un club sportivo prevede l'iscrizione di 60 soci, sempre che la quota per persona sia di 50 euro al mese. Ogni ulteriore aumento pari a 5 euro di questa tariffa, porterebbe 4 dei potenziali 60 membri a rinunciare alla propria adesione. Il costo sostenuto dal club per ogni socio è dell'ordine di 35 euro al mese. Quale quota mensile di iscrizione procurerebbe al club il massimo profitto e quale sarebbe in tal caso il numero dei soci?"

Conviene assumere come incognita x il numero degli aumenti della quota mensile d'iscrizione; la quota sarà perciò 50+5x e il numero dei soci residui 60-4x.

Il profitto y è dato dalla differenza fra il ricavo e il costo:

$$y = (50 + 5x)(60 - 4x) - 35(60 - 4x)$$
$$y = -20x^2 + 240x + 900.$$

La funzione $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola il cui vertice è il punto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e l'asse di simmetria è la retta, parallela all'asse delle y, di equazione $x = -\frac{b}{2a}$.

Se è a > 0, allora il vertice della parabola è il punto che ha minima ordinata, mentre se è a < 0, è il punto che ha massima ordinata.

Nel nostro caso y avrà un massimo per x = 6 aumenti. La quota mensile che procurerebbe il massimo profitto sarà perciò di 80 euro, il massimo profitto sarà di 1620 euro e il numero dei soci residui 36.

BIBLIOGRAFIA

A. CHRISTIE, *Miss Marple e i tredici problemi*. Oscar Mondadori, Milano 1989

M. GARDNER, *Ah! Ci sono! Paradossi stimolanti e divertenti*. R.B.A. Italia, Milano, 2008

M. GARDNER, *Esperienza a-ah!* R.B.A. Italia, Milano, 2008

M. GARDNER, *Come buttarsi dalla torre di Hanoi*. Hachette, Milano, 2017

L. LOMBARDO RADICE – L. MANCINI PROIA, *Il metodo matematico. vol 1*. Principato, Milano, 1977

J.B. MARION, *La fisica e l'universo fisico*. Zanichelli, Bologna, 1976

M.A. MUNEM – J.D. FOULIS, *Algebra 2*. Zanichelli, Bologna, 1984.