La probabilità in funzione delle assicurazioni sulla vita.

di Antonino Giambò

1. Le assicurazioni.

Un campo, in cui si registra un'interessante applicazione del calcolo delle probabilità, è costituito dalle "assicurazioni sulla vita". In questo articolo, senza entrare nello specifico della convenienza di servirsi di questa o di quell'altra compagnia di assicurazioni, intendo soffermarmi proprio sugli aspetti probabilistici della questione o, quantomeno, su alcuni di essi.

Intanto, in via preliminare, ecco come il Codice Civile (art. 1882) definisce l'assicurazione:

«*L'*assicurazione *è il contratto con il quale l'*assicuratore*, verso pagamento di un corrispettivo, detto* premio*, si obbliga a risarcire l'*assicurato*, entro limiti stabiliti, del* danno ad esso provocato da un sinistro, *oppure a corrispondergli un capitale o una rendita al verificarsi di un* evento riguardante la vita umana».

In altre parole, con un contratto assicurativo (denominato anche *polizza* di assicurazione) un soggetto (l'*assicurato*) paga una certa somma (il *premio*) ad un altro soggetto (l'*assicuratore*) per:

a) ricevere un risarcimento adeguato in caso di un evento casuale (il *sinistro*) che possa provocargli un *danno* previsto dal contratto (*assicurazione danni*),

b) vedersi corrisposta una somma al verificarsi di altri eventi casuali, essi pure previsti dal contratto, come, per esempio, *essere in vita* o *essere morto* in un determinato anno (*assicurazione sulla vita*).

Non mi occuperò delle assicurazioni danni ma soltanto delle assicurazioni sulla vita.

Le assicurazioni sulla vita sono sostanzialmente di due tipi:

1) assicurazioni in caso di vita, 2) assicurazioni in caso di morte.

- Nelle *assicurazioni in caso di vita*, l'assicuratore assume l'impegno di pagare una certa somma, tutta in una volta o a rate, all'assicurato soltanto se quest'ultimo è in vita ad una determinata epoca precisata nella polizza di assicurazione.
- Nelle *assicurazioni in caso di morte*, l'assicuratore s'impegna a pagare la somma concordata nel contratto agli eredi dell'assicurato in caso di morte di quest'ultimo entro un periodo stabilito nella polizza di assicurazione.

Oltre alle anzidette, c'è una forma di assicurazione che contempla una combinazione delle due forme precedenti: si chiama *assicurazione mista*.

Ora, si capisce che il premio, che l'assicurato versa all'assicuratore al momento della stipula del contratto, non può essere una costante, dal momento che dipende da fattori casuali come essere in vita o essere morto all'epoca in cui si presume di riscuotere la somma concordata. Per questo acquista importanza la conoscenza della probabilità di essere in vita o di essere morto ad una determinata epoca.

È esattamente questo l'oggetto del presente articolo: stabilire come possa essere calcolata quella probabilità.

2. Le tavole di sopravvivenza.

La probabilità che ha un individuo di una data età di essere in vita ad una determinata epoca può essere acquisita solo in maniera empirica, per esempio analizzando quanti, fra gli individui che compongono una comunità, sopravvivono anno dopo anno. E, sulla base dei dati sperimentali osservati, calcolare la probabilità cercata.

Ora, riuscire a monitorare quanti, all'interno di una comunità, sopravvivano fino ad un numero di anni piuttosto elevato (diciamo 100, ma solo per esempio), non è impresa fattibile e, quand'anche lo fosse, i risultati sarebbero inutilizzabili. Alle compagnie di assicurazione interessa sapere OGGI e non fra 100 ANNI quanti soggetti abbiano probabilità di sopravvivere fino ad una determinata età. Bisogna trovare strade alternative.

Ebbene, una di queste vie è quella che mi accingo a descrivere.

Sotto speciali condizioni che garantiscano le cosiddette *ipotesi di stazionarietà e di omogeneità* (per esempio: non si sono verificate catastrofi né guerre, non c'è stata una terribile epidemia come il Covid-19, è rimasta praticamente uguale a zero la differenza fra emigrati ed immigrati, eccetera), si considera un campione fittizio, prendendo una popolazione statistica di 100.000 soggetti nati vivi e si conta il numero L_x dei viventi di età x, cioè il numero di coloro che sono in vita dopo x anni dalla nascita, al variare di x da **0** anni ad $\boldsymbol{\omega}$ anni, dove ω rappresenta l'età più avanzata, detta anche ***età estrema***, nel senso che, mentre è ancora in vita qualche individuo della comunità che ha $\omega-1$ anni, non ne esiste alcuno che ha ω anni, per cui, ovviamente, $L_{\omega-1}\neq 0$ mentre $L_{\omega}=0$.

Sulla base di questi rilevamenti si costruisce un'apposita tabella, chiamata ***tavola di sopravvivenza***, mediante la quale si può calcolare, per ogni età x, il numero L_x dei viventi di quella comunità, cioè quanti soggetti tra i 100.000 presi in esame sono in vita al compimento di x anni di età. Naturalmente $L_0=100.000$.

Il fatto interessante è che, ipotizzando che questo accada per qualunque comunità con le medesime caratteristiche, la tabella è utilizzata appunto per qualsiasi comunità.

Affinché si abbia chiara l'idea di un tale importante strumento, fornisco anzitutto la tavola di sopravvivenza relativa ad una determinata popolazione (tabella 1). La tavola non indica l'età estrema, che potrebbe essere 100 anni o un'età maggiore, ma la cosa è irrilevante per i nostri scopi.

TAVOLA DI SOPRAVVIVENZA									
Età in anni	Numero viventi	Età in anni	Numero viventi	Età in anni	Numero viventi	Età in anni	Numero viventi	Età in anni	Numero viventi
0	100.000	**20**	99.164	**40**	97.967	**60**	92.175	**80**	62.724
1	99.658	**21**	99.125	**41**	97.841	**61**	91.577	**81**	59.454
2	99.607	**22**	99.093	**42**	97.715	**62**	90.893	**82**	56.209
3	99.573	**23**	99.058	**43**	97.590	**63**	90.148	**83**	53.031
4	99.556	**24**	99.019	**44**	97.462	**64**	89.411	**84**	49.872
5	99.551	**25**	98.970	**45**	97.341	**65**	88.669	**85**	46.330
6	99.546	**26**	98.914	**46**	97.206	**66**	87.819	**86**	42.327
7	99.537	**27**	98.856	**47**	97.034	**67**	86.859	**87**	37.978
8	99.527	**28**	98.796	**48**	96.820	**68**	85.759	**88**	33.727
9	99.517	**29**	98.740	**49**	96.559	**69**	84.663	**89**	29.726
10	99.507	**30**	98.695	**50**	96.271	**70**	83.487	**90**	25.947
11	99.492	**31**	98.658	**51**	95.979	**71**	82.220	**91**	22.338
12	99.447	**32**	98.615	**52**	95.680	**72**	80.769	**92**	18.892
13	99.407	**33**	98.562	**53**	95.386	**73**	79.129	**93**	15.635
14	99.366	**34**	98.504	**54**	95.058	**74**	77.362	**94**	12.623
15	99.324	**35**	98.451	**55**	94.682	**75**	75.378	**95**	10.071
16	99.272	**36**	98.388	**56**	94.260	**76**	73.176	**96**	7.879
17	99.230	**37**	98.293	**57**	93.783	**77**	70.838	**97**	5.935
18	99.215	**38**	98.193	**58**	93.261	**78**	68.396	**98**	4.351
19	99.196	**39**	98.074	**59**	92.722	**79**	65.767	**99**	2.961
								≥100	1.929

tabella 1

Da una prima lettura di questa tavola si capisce subito che il numero dei viventi diminuisce con l'aumentare dell'età e la cosa, naturalmente, non stupisce alcuno.

Un grafico (figura 1), tuttavia, ci mostra meglio come stanno le cose.

Si possono allora notare alcuni fatti interessanti, ma certamente anch'essi non sorprendenti:

- fino a circa 35 anni, il numero dei sopravviventi diminuisce molto lentamente;
- la diminuzione è più rapida all'incirca dai 35 ai 70 anni;
- diventa precipitosa oltre i 70 anni, per divenire un po' più lenta oltre i 90 anni.

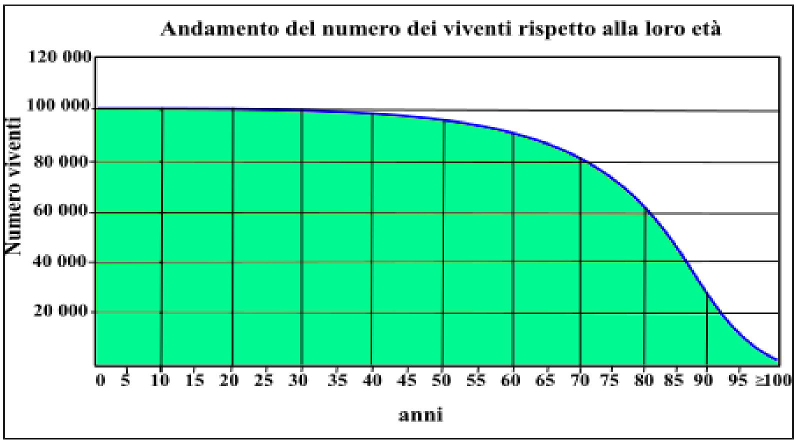

figura 1

Dalla tavola di sopravvivenza si ricavano altre informazioni, come per esempio qual è il numero di morti entro 30 anni di età. Esattamente, questo numero è uguale a $L_0 - L_{30} = 100.000 - 98.695 = 1.305$.

Un'altra figura (figura 2), ricavata sempre dalla tabella 1, mostra meglio questo fatto e, più in generale, fornisce l'andamento del numero di morti entro x anni di età, al variare di x.

Si può notare che la curva cresce lentamente fino ai 35 anni circa; la crescita è più rapida fra i 35 e i 70 anni; dopo i 70 anni la curva ha un'impennata fino a circa 90 anni; da qui in poi la crescita del numero di morti diventa meno rapida, ma solamente perché di vivi, a quelle età, non ne sono rimasti tanti.

Tutto concordemente con l'altra figura, che forniva l'andamento del numero dei viventi rispetto all'età.

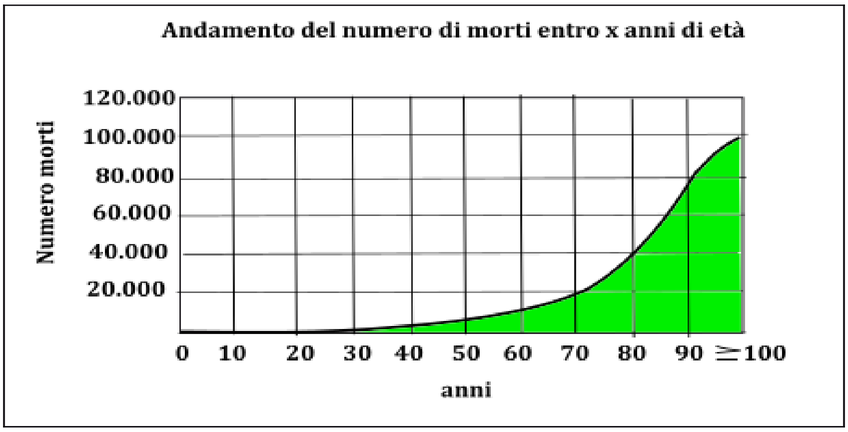

figura 2

3. Il calcolo delle probabilità.

Vediamo allora come la tavola di sopravvivenza (tabella 1) permetta di calcolare la probabilità che una persona di una certa età sia ancora viva ad una determinata epoca o muoia entro un dato intervallo di tempo.

- Un primo risultato, facilmente spiegabile, è il seguente:

> La probabilità P_x che una persona di x anni raggiunga l'età di x+1 anni è uguale al rapporto fra il numero L_{x+1} dei viventi di età x+1 e il numero L_x dei viventi di età x, vale a dire:
>
> $$P_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}.$$
>
> Questa probabilità è denominata **tasso annuo di sopravvivenza** per una persona di x anni.

Per esempio, con riferimento alla tabella 1, il tasso annuo di sopravvivenza di una persona di 35 anni è:

$$P_{35}=\frac{L_{36}}{L_{35}}=\frac{98.388}{98.451}\approx 99{,}94\%\ .$$

Questo significa che, in media su 10.000 persone di 35 anni, 9.994 raggiungeranno i 36 anni.

Di norma, una tavola di sopravvivenza fornisce anche i tassi di sopravvivenza. Ma nella nostra tavola non è così.

- S'intende che la probabilità Q_x contraria di P_x, cioè $Q_x=1-P_x$, rappresenta la probabilità che una persona di x anni non raggiunga l'età di x+1 anni, ossia muoia prima di raggiungere quell'età.

Osservato che si ha:

$$Q_x=1-P_x=1-\frac{L_{x+1}}{L_x}=\frac{L_x-L_{x+1}}{L_x}$$

e costatato che differenza L_x-L_{x+1} fra il numero dei viventi di età x e quello dei viventi di età x+1 non è altro che il numero D_x dei morti [1] all'età di x anni, risulta che:

> La probabilità che una persona di x anni muoia prima di raggiungere gli x+1 anni è uguale al rapporto fra il numero D_x dei morti all'età di x anni ed il numero L_x dei sopravviventi all'età di x anni. Questa probabilità si chiama **tasso annuo di mortalità** per una persona di x anni.

Sempre con riferimento alla tabella 1, risulta:

$$Q_{35}=1-P_{35}=1-0{,}9994=0{,}06\%\ .$$

Questo significa che, in media su 10.000 persone di 35 anni, ne moriranno 6 entro l'anno. Cosa ovvia e prevedibile, considerato il risultato dell'esempio precedente.

> A volte, piuttosto che riferirsi a tavole di sopravvivenza, si costruiscono **tavole di mortalità**. Anche adesso si fa riferimento ad una popolazione di 100.000 nati vivi e si conta quanti di essi muoiono prima di raggiungere il 1° anno di vita, il 2°, il 3° e così via. E anche adesso il numero D_x dei morti all'età di x anni è calcolato attraverso il rilevamento effettuato in tale popolazione statistica. Indicata con L_0 (=100.000) la dimensione di questa popolazione, attraverso la tavola di mortalità si possono ottenere via via:
>
> - il numero di quanti sono vivi all'età 1 anno, uguale evidentemente alla differenza fra il numero dei nati vivi e quello di coloro che sono morti prima di compiere un anno: $L_1=L_0-D_0$;
> - il numero dei sopravviventi di età 2 anni: $L_2=L_1-D_1$;
> - …………………………………. ;
> - il numero dei sopravviventi di età x+1 anni: $L_{x+1}=L_x-D_x$;
> - ………………………………… .
>
> A questo punto si può procedere come se si disponesse di una tavola di sopravvivenza.

- Descriviamo adesso alcune situazioni particolari in cui si applicano i concetti precedenti.

SITUAZIONE 1. Calcolare la probabilità che una persona di x anni raggiunga gli x+n anni.

RISOLUZIONE. Affinché una persona di x anni raggiunga l'età di x+n anni occorre evidentemente che raggiunga anno dopo anno le età: x+1, x+2, …, x+n. La probabilità cercata si indica solitamente col simbolo $\mathbf{{}_nP_x}$ che si legge: *P con x temporaneo n* e si chiama: ***probabilità di sopravvivenza di x dopo n anni***. Si ha allora:

$${}_nP_x=P_x\cdot P_{x+1}\cdot\ldots\cdot P_{x+n}=\frac{L_{x+1}}{L_x}\cdot\frac{L_{x+2}}{L_{x+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{L_{x+n}}{L_{x+n-1}}=\frac{L_{x+n}}{L_x}\ .$$

Pertanto:

> La probabilità che una persona di x anni raggiunga gli x+n anni è il rapporto fra il numero di quanti sono vivi all'età di x+n anni e quello dei sopravviventi all'età di x anni.

[1] La scelta delle lettere L e D (o anche l e d) è legata alla lingua inglese: di fatto, L sta per *Life* (Vita) e D sta per *Death* (Morte).

Per esempio, facendo ancora una volta riferimento alla tabella 1, la probabilità che una persona di 50 anni raggiunga gli 80 anni è:

$$ {}_{30}P_{50} = \frac{L_{50+30}}{L_{50}} = \frac{L_{80}}{L_{50}} = \frac{62.724}{96.271} \approx 65{,}12\% $$

Questo significa che, in media su 10.000 persone di 50 anni, 6.512 raggiungeranno gli 80 anni.

SITUAZIONE 2. Calcolare la probabilità che una persona di x anni non raggiunga gli x+n anni.

RISOLUZIONE. Questa probabilità è evidentemente la probabilità contraria della precedente. Si indica con il simbolo $\mathbf{{}_nQ_x}$ che si legge: *Q con x temporaneo n* e si chiama: ***probabilità di morte di x entro n anni***. Si ha ovviamente:

$$ {}_nQ_x = 1 - {}_nP_x = 1 - \frac{L_{x+n}}{L_x} = \frac{L_x - L_{x+n}}{L_x} \; . $$

Poiché la differenza $L_x - L_{x+n}$ fra il numero dei viventi di età x e quello dei viventi di età x+n è uguale al numero dei morti all'età compresa fra gli x anni (inclusi) e gli x+n anni (esclusi), possiamo concludere che:

La probabilità che una persona di x anni di età muoia entro n anni è uguale al rapporto fra il numero di coloro che sono morti ad un'età compresa fra x anni (inclusi) ed x+n anni (esclusi) ed il numero dei sopravviventi all'età di x anni.

Per esempio, di nuovo con riferimento alla tabella 1, la probabilità che una persona di 50 anni non raggiunga gli 80 anni è evidentemente:

$$ {}_{30}Q_{50} = 1 - {}_{30}P_{50} = 1 - 0{,}6515 = 34{,}85\% \, . $$

Questo significa che, in media su 10.000 persone di 50 anni, ne moriranno 3.485 entro i prossimi 30 anni.

SITUAZIONE 3. Calcolare la probabilità che una persona di x anni muoia ad un'età compresa tra gli x+n anni e gli x+n+m anni.

RISOLUZIONE. Affinché una persona dell'età di x anni muoia fra gli x+n anni e gli x+n+m anni, occorre evidentemente che si verifichino due eventi:

- la persona deve raggiungere l'età di x+n anni;
- la persona, raggiunta questa età, non deve raggiungere l'età di x+n+m anni.

Ora, la probabilità che una persona di x anni raggiunga l'età di x+n anni sappiamo che è:

$$ {}_nP_x = \frac{L_{x+n}}{L_x} \, . $$

La probabilità che questa persona, di x+n anni, raggiunga l'età di x+n+m anni è:

$$ {}_{x+n+m}P_{x+n} = \frac{L_{x+n+m}}{L_{x+n}} \; . $$

Quella che non la raggiunga è allora: $1 - \dfrac{L_{x+n+m}}{L_{x+n}} = \dfrac{L_{x+n} - L_{x+n+m}}{L_{x+n}}$.

Siccome il secondo evento è subordinato al primo, la probabilità cercata (che si indica con il simbolo $\mathbf{{}_{m/n}Q_x}$ che si legge: *Q con x differito m e temporaneo n* e si chiama: ***probabilità di morte di x, differita di m anni e temporanea di n anni***) è data dal prodotto delle probabilità dei due eventi, vale a dire:

$$ {}_{m/n}Q_x = \frac{L_{x+n}}{L_x} \cdot \frac{L_{x+n} - L_{x+n+m}}{L_{x+n}} = \frac{L_{x+n} - L_{x+n+m}}{L_x} \, . $$

Costatato che la differenza $L_{x+n} - L_{x+n+m}$ fra il numero dei viventi di età x+n anni e quello dei viventi di età x+n+m anni non è altro che il numero dei morti di età compresa fra x+n anni (inclusi) e x+n+m anni (esclusi), dal risultato precedente segue che:

La probabilità che una persona di x anni muoia ad un'età compresa fra gli x+n anni e gli x+n+m anni è uguale al rapporto fra il numero di coloro che sono morti ad un'età compresa fra x+n anni (inclusi) ed x+n+m anni (esclusi) ed il numero dei sopravviventi all'età di x anni.

Per esempio, con riferimento alla solita tabella 1, la probabilità che una persona di 40 anni muoia fra il 70° anno di vita (incluso) e l'80° (escluso) è:

$$ {}_{10/30}Q_{40} = \frac{L_{40+30} - L_{40+30+10}}{L_{40}} = \frac{L_{70} - L_{80}}{L_{40}} = \frac{83487 - 62724}{97967} \approx 21{,}19\%. $$

Come al solito, questo significa che, in media su 10.000 persone di 40 anni, ne moriranno 2.119 fra il 70° e l'80° anno di età.

4. Vita probabile e vita media.

Nel linguaggio delle assicurazioni sono frequenti due concetti, quello di *vita probabile* e quello di *vita media* (o *speranza di vita*) di una persona. Ritengo opportuno farne un breve cenno.

- Incominciamo con la definizione della prima:

Vita probabile di una persona è il numero di anni che, con probabilità del 50%, gli rimangono da vivere.

Per calcolare la vita probabile di una persona di x anni bisogna disporre di una tavola di sopravvivenza. Vediamo in che modo questo calcolo possa essere effettuato.

Ammesso, allora, che sia t la vita probabile di una persona di x anni, in base a quanto detto in precedenza (situazione 1) ed alla definizione di vita probabile, intanto risulta:

$$ \frac{L_{x+t}}{L_x} = \frac{1}{2} . $$

Nella tavola di sopravvivenza si legge il valore di L_x, perciò si conosce il valore di L_{x+t}, che vale esattamente: $\frac{1}{2} L_x$.

Se capita il caso, eccezionalmente fortunato, che questo valore di L_{x+t} si trovi nella tavola di sopravvivenza, basta leggere, sempre nella tavola, quale valore di x+t corrisponde a L_{x+t} ; ammesso che esso sia u, significa che $x+t=u$ e perciò $t=u-x$.

Se, al contrario, capita il caso più frequente che il valore di L_{x+t} non si trovi nella tavola di sopravvivenza, si ricorre all'interpolazione lineare. Per questo si cercano nella tavola i due valori consecutivi entro i quali è compreso L_{x+t} : ammettiamo che siano L_n ed L_{n+1}. Si costruisce allora la seguente tabella di corrispondenza fra le età e il numero dei viventi:

$$ \begin{bmatrix} n & L_n \\ x+t & L_{x+t} \\ n+1 & L_{n+1} \end{bmatrix} $$

Deve essere soddisfatta la seguente relazione:

$$ \frac{L_{x+t} - L_n}{L_{n+1} - L_n} = \frac{(x+t) - n}{(n+1) - n} \quad \text{vale a dire:} \quad \frac{L_{x+t} - L_n}{L_{n+1} - L_n} = (x+t) - n . $$

da cui si ricava il valore di t.

Per esempio, supponendo che la tavola di sopravvivenza di riferimento sia quella della tabella 1, ci proponiamo di calcolare la vita probabile di una persona di 45 anni.

Intanto, indicata con t la vita probabile cercata, si ha:

$$ L_{45+t} = \frac{1}{2} L_{45} = 48.603 . $$

Nella tavola di sopravvivenza (tabella 1) non figura, nella colonna "Numero viventi", il valore 48.603. Ma si può costatare che esso è compreso fra i due valori: 49.872 e 46.330, cui corrispondono rispettivamente le età 84 anni e 85 anni. Si ha pertanto la seguente relazione:

$$ \frac{L_{45+t} - L_{84}}{L_{85} - L_{84}} = (45+t) - 84 , \quad \text{ossia:} \quad \frac{48.603 - 49.872}{46.330 - 49.872} = t - 39 , \quad \text{da cui segue:} \quad t \approx 39{,}36 . $$

Perciò: una persona di 45 anni di età ha una probabilità di vita all'incirca di 39,36 anni.

Oppure, detto in altri termini: una persona di 45 anni di età vivrà, con probabilità del 50%, per altri 39,36 anni, che è come dire 39 anni 4 mesi e 9 giorni circa.

Questo, sostanzialmente, significa che, su 100 persone di 45 anni di età, probabilmente 50 vivranno per altri 39,36 anni e 50 vivranno per un periodo diverso (minore o maggiore).

- Un altro concetto, molto usato nel linguaggio delle assicurazioni, come detto, è quello di "vita media", chiamata anche "speranza di vita" di una persona.

Si definisce **vita media** (o **speranza di vita**) di una persona di x anni il numero medio di anni che ancora gli restano da vivere.

Di particolare rilievo è la vita media di una persona di 0 anni, denominata anche ***speranza di vita alla nascita***.

Esistono formule matematiche, idonee a calcolare la speranza di vita di una persona di x anni di età, basate sempre sulle tavole di sopravvivenza, ma questo parametro è sistematicamente presente nelle tavole medesime. Vedremo comunque ugualmente più avanti una di queste formule.

Per esempio, per quanto concerne l'Italia, l'ISTAT (Istituto Nazionale di Statistica) fornisce la speranza di vita alle diverse età, riferita al 1999 e distinta fra i due sessi. La tabella corrispondente è parzialmente riprodotta qui sotto (tabella 2).

SPERANZA DI VITA IN ITALIA – ANNO 1999		
Età	Maschi	Femmine
0	76,0	82,1
15	61,6	67,7
45	33,1	38,4
65	16,2	20,2
75	9,7	12,3

tabella 2

Sempre l'ISTAT fornisce la speranza di vita alla nascita, relativa all'anno 2001, distribuita per regione e per sesso (tabella 3).

SPERANZA DI VITA ALLA NASCITA, PER REGIONE E PER SESSO – ANNO 2001.					
Regione	Maschi	Femmine	Regione	Maschi	Femmine
Piemonte e Valle d'Aosta	76,4	82,6	Marche	78,0	84,3
Lombardia	76,3	83,1	Lazio	76,9	82,7
Prov. Autonoma Bolzano	77,0	84,1	Abruzzo e Molise	77,7	83,8
Prov. Autonoma Trento	76,9	83,9	Campania	75,3	81,2
Veneto	76,9	83,7	Puglia	77,6	83,2
Friuli Venezia Giulia	76,6	83,2	Basilicata	77,5	83,0
Liguria	76,5	82,7	Calabria	77,6	82,9
Emilia Romagna	77,2	83,4	Sicilia	76,6	81,9
Toscana	77,3	83,4	Sardegna	76,2	83,0
Umbria	77,8	83,6	**TOTALE**	**76,7**	**82,9**

tabella 3

La tabella seguente (tabella 4), ricavata sempre da indagine ISTAT, registra invece la speranza di vita alla nascita in Italia, negli ultimi 40 anni, valutata a intervalli di 3 anni:

SPERANZA DI VITA ALLA NASCITA, IN ITALIA		
Anno	Maschi	Femmine
1989	73,6	80,2
1992	74,0	80,5
1995	74,2	81,1
1998	75,5	81,5
2001	77,0	82,8
2004	78,0	83,5
2007	78,6	83,9
2010	79,2	84,3
2013	79,8	84,6
2016	80,5	85,0
2019	80,9	85,2

tabella 4

Una figura rende meglio l'andamento dei parametri rilevati (figura 3).

Si può notare come la speranza di vita alla nascita, in Italia, sia cresciuta negli ultimi 40 anni, dal 1989 al 2019, seppure lentamente, fino a migliorare di circa 7,3 anni per gli uomini (+9,9%) e di circa 5 anni per le donne (+6,2%).

Questo, grazie a diversi fattori, come, per esempio, una migliore nutrizione, controlli medici più accurati, lavori meno faticosi, eccetera.

C'è da aspettarsi purtroppo che la situazione sarà meno rosea dopo l'ondata epidemica del Covid-19.

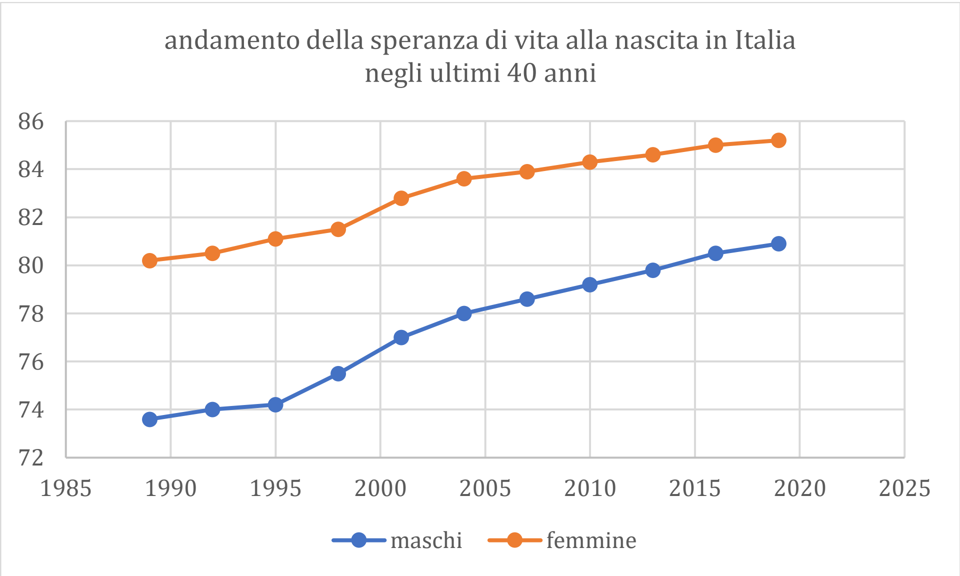

figura 3

Concludo fornendo, come promesso, una formula matematica che consenta di avere una buona approssimazione della vita media E_x di una persona di età x anni.

Se L_x indica, come al solito, il numero dei viventi di x anni di età e, in particolare, l'anno ω rappresenta l'età estrema (ossia, lo ripeto, l'anno oltre il quale non sopravvive nessuno, per cui: $L_\omega=0$ mentre $L_{\omega-1}\neq 0$), allora l'età media di una persona di x anni è espressa dalla formula seguente:

[1] $$E_x = \frac{L_{x+1} + L_{x+2} + \ldots + L_{\omega-1}}{L_x} \ .$$

Per esempio, facendo riferimento ancora una volta alla tabella 1 ed applicando più volte la formula [1]:

- dopo aver constatato che $L_{50} = 96.271$, mentre $L_{51}+L_{52}+\ldots+L_{\omega-1} = 3.095.245$, si ha: $E_{50} \approx 32{,}15$ anni;
- dopo aver constatato che $L_{60} = 92.175$, mentre $L_{61}+L_{62}+\ldots+L_{\omega-1} = 2.152.259$, si ha: $E_{60} \approx 23{,}35$ anni;
- dopo aver constatato che $L_{70} = 83.487$, mentre $L_{71}+L_{72}+\ldots+L_{\omega-1} = 1.272.974$, si ha: $E_{70} \approx 15{,}25$ anni;
- dopo aver constatato che $L_{80} = 62.724$, mentre $L_{81}+L_{82}+\ldots+L_{\omega-1} = 537.215$, si ha: $E_{80} \approx 8{,}56$ anni;
- dopo aver constatato che $L_{90} = 25.947$, mentre $L_{91}+L_{92}+\ldots+L_{\omega-1} = 102.614$, si ha: $E_{90} \approx 3{,}95$ anni.

Ci soffermiamo adesso sulla **dimostrazione della formula** [1]. Incominciamo col dire che gli anni che ha ancora da vivere un individuo di età x anni è una variabile aleatoria V suscettibile dei valori:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \omega-x-1$$

con probabilità rispettivamente:

$$Q_x,\ {}_{1/1}Q_x,\ {}_{1/2}Q_x,\ {}_{1/3}Q_x,\ \ldots,\ {}_{1/(\omega-x-1)}Q_x,$$

vale a dire, nell'ordine:

$$\frac{L_x - L_{x+1}}{L_x},\ \frac{L_{x+1} - L_{x+2}}{L_x},\ \frac{L_{x+2} - L_{x+3}}{L_x},\ \frac{L_{x+3} - L_{x+4}}{L_x},\ \ldots,\ \frac{L_{\omega-1} - L_{\omega}}{L_x}.$$

Che V sia effettivamente una variabile aleatoria è giustificato dal fatto che la somma S di queste probabilità è uguale ad 1. Si ottiene infatti facilmente

$$S = \frac{L_x - L_{\omega}}{L_x}\ .$$

E, ricordando sempre che $L_{\omega} = 0$, si ha: $S=1$.

Ebbene, la vita media del soggetto in questione non è altro che la media della variabile aleatoria V, ossia:

$$E_x = 0\cdot\frac{L_x - L_{x+1}}{L_x} + 1\cdot\frac{L_{x+1} - L_{x+2}}{L_x} + 2\cdot\frac{L_{x+2} - L_{x+3}}{L_x} + 3\cdot\frac{L_{x+3} - L_{x+4}}{L_x} + \ldots + (\omega-x-1)\cdot\frac{L_{\omega-1} - L_{\omega}}{L_x}.$$

A conti fatti, segue la [1].

Alla fine, non sono gli anni nella tua vita che contano. È la vita nei tuoi anni.

Abramo Lincoln, 16° Presidente degli USA, 1809-1865.