**Breve storia della Probabilità**
di Antonino Giambò

## 1. Premessa.

Il calcolo delle probabilità è nato per frivole faccende di gioco d'azzardo, ma ha finito per diventare uno degli strumenti applicativi più importanti in molti campi, dalle scienze sperimentali all'economia, dalle assicurazioni alla medicina, dalla genetica alle scommesse, eccetera.

Nel corso degli anni e più esattamente durante gli ultimi tre secoli, ci sono stati diversi tentativi di dare una "definizione operativa" della probabilità di un evento casuale, una definizione cioè tale da permettere il calcolo della misura del grado di fiducia che si attribuisce al verificarsi dell'evento.

È esattamente sulla descrizione e sull'analisi di questi tentativi che mi soffermerò in questo articolo.

## 2. Concezione classica.

La prima definizione di probabilità di un evento casuale è conosciuta come ***definizione classica della probabilità***: comparve nel 1812 in un'opera del matematico francese **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827).

Questo non significa che prima di allora non si fossero affrontate questioni connesse alla probabilità. In realtà, il problema, collegato ai giochi d'azzardo, è antico quanto il mondo. Non mancano, infatti, in letteratura esempi di scommesse che fanno pensare a valutazioni di probabilità, per lo meno a livello intuitivo.

Inoltre, già un secolo prima di Laplace, era stata data da De Moivre un'analoga definizione di probabilità.

E, comunque, molto prima di Laplace erano stati affrontati problemi legati alla probabilità.

Ma procediamo con ordine.

Tradizionalmente, l'abbrivo al calcolo delle probabilità si fa risalire ad un'interessante corrispondenza sviluppatasi nel corso dell'anno 1654 tra i francesi **Pierre de Fermat** (1601-1665) e **Blaise Pascal** (1623-1662). Corrispondenza ispirata da questioni che a Pascal poneva il suo amico Antoine Gombaud, Cavaliere di Méré, e che Pascal comunicava a Fermat per uno scambio di opinioni.

Per la verità si erano già occupati di questioni collegate alla probabilità **Gerolamo Cardano** (1501-1576) in un'opera dal titolo *Liber de ludo aleae*, scritta nel 1526, ma pubblicata postuma nel 1663, e **Galileo Galilei** (1564-1642) nell'opera *Sulla scoperta dei dadi*, scritta nel 1596, anch'essa pubblicata postuma nel 1656. Insomma, entrambe queste opere furono conosciute dopo il celebre carteggio fra Pascal e Fermat.

Ritengo interessante riferire di un problema che figura nell'opera di Galilei. Al grande scienziato toscano fu posta – sembra da Cosimo II de' Medici, granduca di Toscana (1590-1621) – la seguente questione, correlata ad un gioco d'azzardo, chiamato *zara*:

«Nel lancio di tre dadi la somma 9 e la somma 10 possono essere ottenute entrambe in 6 modi, ma l'esperienza mostra che la somma 10 si ottiene più spesso della somma 9. Come si spiega questo fatto?»

I 6 modi in cui si può ottenere la somma 9 sarebbero, secondo colui che poneva la questione:

$$1+2+6,\ \ 1+3+5,\ \ 1+4+4,\ \ 2+2+5,\ \ 2+3+4,\ \ 3+3+3.$$

Quelli in cui si può ottenere la somma 10 sarebbero a loro volta:

$$1+3+6,\ \ 1+4+5,\ \ 2+2+6,\ \ 2+3+5,\ \ 2+4+4,\ \ 3+3+4.$$

C'è un grossolano errore nella premessa, che Galilei rilevò correttamente.

In effetti, la somma 10 può essere ottenuta un numero di volte (27) maggiore di quello (25) relativo alla somma 9, concordemente all'esperienza.

Il ragionamento per provare ciò è schematizzato nella sottostante tabella (tabella 1).

| se in uno dei tre dadi esce: | si ha somma 9: | | si ha somma 10: | |
|---|---|---|---|---|
| | per un numero di volte uguale a: | se la somma degli altri due numeri è: | per un numero di volte uguale a: | se la somma degli altri due numeri è: |
| 1 | 5 | 8<br>(2-6, 6-2, 3-5, 5-3, 4-4) | 4 | 9<br>(3-6, 6-3, 4-5, 5-4) |
| 2 | 6 | 7<br>(1-6, 6-1, 2-5, 5-2, 3-4, 4-3) | 5 | 8<br>(2-6, 6-2, 3-5, 5-3, 4-4) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 6<br>(1-5, 5-1, 2-4, 4-2, 3-3) | 6 | 7<br>(1-6, 6-1, 2-5, 5-2, 3-4, 4-3) |
| 4 | 4 | 5<br>(1-4, 4-1, 2-3, 3-2) | 5 | 6<br>(1-5, 5-1, 2-4, 4-2, 3-3) |
| 5 | 3 | 4<br>(1-3, 3-1, 2-2) | 4 | 5<br>(1-4, 4-1, 2-3, 3-2) |
| 6 | 2 | 3<br>(1-2, 2-1) | 3 | 4<br>(1-2, 2-1, 2-2) |

tabella 1

Ma ritorniamo a Pascal e Fermat.

I primi contributi atti a definire correttamente le questioni legate alla probabilità si hanno con il cosiddetto **problema della divisione delle parti**. Di questo problema (che alcuni denominano ***problema della divisione della posta*** e altri ***problema della partita interrotta***) mi sono occupato ampiamente in un articolo pubblicato su questa medesima rubrica e non intendo perciò dilungarmi oltre, rimandando appunto a quell'articolo.

- Quel problema fu uno dei tanti che il Cavaliere di Méré propose a Pascal. Eccone un altro:

Nel lancio di un dado, puntando sul "6" chiedo a priori di poter eseguire 4 lanci per avere maggiore possibilità di vincere che di perdere. Nel lancio di due dadi, puntando sul "doppio 6", i casi possibili sono 36 e, come 4 è i $2/3$ di 6, così 24 lp è di 36. Quindi, per avere la maggiore possibilità di vincere che di perdere dovrei chiedere a priori di poter effettuare 24 lanci. Tuttavia, 24 lanci non sono sufficienti a darmi maggiore possibilità di vincere che di perdere. Come si spiega ciò?

Anche di questo problema Pascal e Fermat fornirono la soluzione.

Ecco una spiegazione seguendo però ragionamenti a noi familiari.

- Nel caso di n lanci di un dado, la probabilità che non esca il "6" è: $q=(5/6)^n$, per cui la probabilità che esca almeno un "6", vale a dire la probabilità contraria, è: $p=1-(5/6)^n$. Affinché abbia più possibilità di vincita che di perdita, questa probabilità deve essere ovviamente maggiore di $1/2$, ossia deve risultare:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>\frac{1}{2}.$$

Ora, utilizzando una semplice calcolatrice scientifica, possiamo compilare un'idonea tabella (tabella 2), dalla quale si desume che, effettivamente, chiedendo di poter effettuare 4 lanci, ho maggiore possibilità di vincere che di perdere.

- Nel caso di n lanci di due dadi, la probabilità che non esca un "doppio 6" è: $q=(35/36)^n$, per cui la probabilità che esca almeno un "doppio 6" è: $p=1-(35/36)^n$. Come prima, affinché abbia più possibilità di vincere che di perdere, deve essere:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n>\frac{1}{2}.$$

Di nuovo, basta compilare un'idonea tabella (tabella 3) e da essa si evince che per avere più possibilità di vincita che di perdita, devo chiedere di poter eseguire 25 lanci; 24 non mi danno la garanzia.

| Lanci di un dado | | |
|---|---|---|
| $n$ = numero lanci | 3 | 4 |
| $p=1-(5/6)^n$ | 0,42 | 0,51 |

tabella 2

| Lanci di due dadi | | |
|---|---|---|
| $n$ = numero lanci | 24 | 25 |
| $p=1-(35/36)^n$ | 0,491 | 0,505 |

tabella 3

- Altri studiosi contribuirono a sviluppare la materia. Tra loro, in particolare:

- l'olandese **Christian Huygens** (1629-1695) con l'opera *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (*Sui ragionamenti nel gioco dei dadi*), pubblicata nel 1657 e ispirata, pare, dalla corrispondenza tra Pascal e Fermat; l'opera costituì un vero e proprio punto di riferimento per gli studiosi che si sarebbero occupati dell'argomento nei successivi 50 anni;

- lo svizzero **Jakob Bernoulli** (1654-1705) con l'*Ars Conjectandi* (L'*Arte della congettura*), un trattato pubblicato postumo nel 1713; quest'opera contiene il celebre "teorema di Bernoulli", noto pure come "legge dei grandi numeri";
- il francese **Abraham De Moivre** (1667-1754), del quale segnalo due opere, una scritta in latino – *De Mensura Sortis* (1711) – ed una in inglese – *The Doctrine of Changes* (1718).

A dire il vero, in tutti i lavori precedenti al *The Doctrine of Changes*, il concetto esplicito di "probabilità" è di fatto inesistente. Anche se non manca, come in Bernoulli, un'idea del termine "probabilità": «*La probabilità è un grado di certezza e da questa differisce come il tutto dalla parte*».

E lo stesso termine "probabilità" aveva fatto capolino già nel 1663 nel titolo di un'opera dello spagnolo **Juan Caramuel y Lobkowitz** (1606-1682): *Apologema pro antiquissima doctrina de Probabilitate*. L'opera fu a quel tempo condannata dalla Chiesa e inserita nell'indice dei libri proibiti. Juan, che era vescovo cattolico, si sottomise a questa decisione [(1)].

Comunque, tornando al nostro tema, il concetto vero e proprio di "probabilità" compare per la prima volta nel *De Mensura Sortis* e ribadito nel *The Doctrine of Changes*. In quest'ultima opera De Moivre parla esplicitamente di *probabilità di un evento:*

« *The probability of an event is greater or less, according to the number of chances by which it may happen, compared with the whole number of chances by which it may either happen or fail.*

*Wherefore, if we constitute a fraction whereof the numerator be the number of chances whereby an event may happen, and the denominator the number of all the chances whereby it may either happen or fail, that fraction will be a proper designation of the probability of happening* » [(2)].

È già la definizione classica. Qui è sottinteso che i casi si verificano con "pari possibilità", cosa che invece era detta chiaramente nel *De Mensura Sortis*, dove appunto si precisa che i casi favorevoli all'evento e quelli contrari devono essere *aeque faciles*.

- Chi legge queste note potrebbe legittimamente domandarsi, a questo punto, come facessero gli studiosi, prima di De Moivre, a risolvere questioni di probabilità senza utilizzare il concetto di probabilità. Il fatto è che dominava a quell'epoca il concetto di *speranza matematica* (o *expectatio*, come la chiamò Huygens, che la introdusse) in una maniera che non coinvolgeva direttamente la probabilità. Va detto, poi, che la "speranza matematica" non era la stessa cosa presso tutti gli studiosi.

Per esempio, Huygens, in uno degli innumerevoli esercizi presenti nel *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, dice sostanzialmente: Se un giocatore ha p opportunità di vincere la somma a e q opportunità di vincere la somma b, essendo le opportunità equivalenti, la sua *speranza matematica* (vale a dire ciò che mediamente si aspetta di vincere) è:

$$\frac{p\,a + q\,b}{p + q}.$$

Jakob Bernoulli, invece, nell'*Ars Conjectandi*, afferma: Se un giocatore ha p opportunità di vincere la somma a e q possibilità di non vincerla, la sua speranza matematica è:

$$\frac{p\,a}{p + q}.$$

---

[1] Il vescovo **Juan Caramuel** (italianizzato **Giovanni Caramuele**), personaggio eclettico, erudito, di molteplici interessi, visse a lungo in Italia nell'ultima parte della sua vita. Fu infatti vescovo, per circa 15 anni a partire dal 1657, di Campagna e Satriano, all'epoca facenti parte del Regno di Napoli; poi, dal 1673 e fino alla morte, fu vescovo di Vigevano.
Nel quadro delle iniziative legate a "Matera 2019 – Capitale europea della cultura", è stato ricordato e celebrato a Sant'Angelo Le Fratte (Potenza).

[2] *La* ***probabilità di un evento*** *è maggiore o minore secondo il numero di casi in cui può realizzarsi, confrontato con il numero di casi in cui può o realizzarsi o non realizzarsi.*
*Pertanto, se formiamo una frazione il cui numeratore è il numero di casi in cui un evento può realizzarsi ed il denominatore è il numero totale di casi in cui esso può realizzarsi o meno, quella frazione sarà una indicazione adeguata della probabilità del realizzarsi* [ovviamente dell'evento].

Giusto per avere una qualche idea di come funzionassero le cose, operando sulla base della speranza matematica, descrivo come grossomodo era risolto da Huygens il seguente problema [2, pagg. 46-54]:

Comincia il gioco il giocatore B, il quale lancia due dadi: egli vince la posta S se ottiene la somma 6. In caso contrario il gioco passa al giocatore A, il quale lancia i due dadi e vince la posta S se ottiene la somma 7. Se A non vince, il gioco ritorna a B, che nuovamente lancia i due dadi e vince la posta S se esce la somma 6. In caso contrario il gioco ripassa ad A e così via. Qual è la speranza matematica di A all'inizio del gioco?

- Risoluzione. Sia x la speranza matematica di A all'inizio del gioco ed x' quella dopo che B ha lanciato la prima volta ma senza vincere. Allora – seguendo per comodità il grafo sottostante (figura 1), che descrive la partita – nel momento in cui, all'inizio del gioco, B lancia i due dadi, A ha la possibilità di vincere la somma 0 in 5 casi su 36 (esce una di queste coppie: $1+5,\ 5+1,\ 2+4,\ 4+2,\ 3+3$), nei quali casi vince B; ha invece la possibilità di vincere la somma x' in $36-5=31$ casi su 36, dopo che B ha lanciato la prima volta ma senza vincere. Per cui:

$$x = \frac{0 \cdot 5 + x' \cdot 31}{5 + 31}.$$

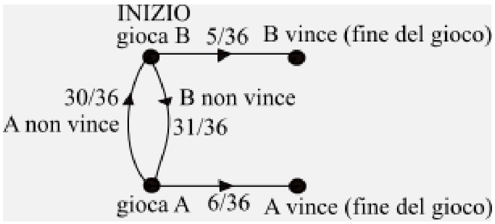


figura 1

Dopo che B ha lanciato la prima volta e non ha vinto, per cui il gioco è passato ad A, questi vince la posta S in 6 casi su 36 (esce una di queste coppie: $1+6,\ 6+1,\ 2+5,\ 5+2,\ 3+4,\ 4+3$) e vince la somma x in $36-6=30$ casi su 36 (dopo che A ha lanciato e non ha vinto, per cui il gioco è ritornato a B). Pertanto:

$$x' = \frac{S \cdot 6 + x \cdot 30}{6 + 30}.$$

A questo punto basta risolvere il sistema delle due equazioni trovate, nelle incognite x ed x', e si ottiene:

$$x = (31/61)\ S\,.$$

- Oggigiorno ragioniamo diversamente per risolvere la questione. Lo possiamo fare in due modi: il primo basato sul concetto di variabile casuale [3], il secondo utilizzando la probabilità composta e le proprietà di una progressione geometrica.

Seguendo il primo modo, si tratta di far riferimento alla variabile casuale X che assume valore 0 con probabilità 5/36 e valore x' con probabilità 31/36 ed alla variabile casuale X' che assume valore S con probabilità 6/36 e valore x con probabilità 30/36. In simboli:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & x' \\ 5/36 & 31/36 \end{bmatrix}, \qquad X' = \begin{bmatrix} S & x \\ 6/36 & 30/36 \end{bmatrix}.$$

Costatato che la speranza matematica di X è $M(X)=0\cdot\frac{5}{36}+x'\cdot\frac{31}{36}$ e quella di X' è $M(X')=S\cdot\frac{6}{36}+x\cdot\frac{30}{36}$ e osservato altresì che $M(X)=x$ e $M(X')=x'$, si ritorna alle stesse due equazioni precedenti e quindi alla medesima soluzione.

Con il secondo metodo si tratta di calcolare, in via preliminare, la probabilità p che ha il giocatore A di vincere comunque vadano le cose. Con un po' di riflessione si trova che:

$$p = \frac{31}{36}\cdot\frac{6}{36} + \left(\frac{31}{36}\right)\cdot\frac{30}{36}\cdot\frac{31}{36}\cdot\frac{6}{36} + \left(\frac{31}{36}\cdot\frac{30}{36}\cdot\frac{31}{36}\right)\cdot\frac{30}{36}\cdot\frac{31}{36}\cdot\frac{6}{36} + \cdots =$$

$$= \frac{31}{36}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left\{1 + \frac{31}{36}\cdot\frac{5}{6} + \left(\frac{31}{36}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{31}{36}\cdot\frac{5}{6}\right)^3 + \cdots\right\} = \frac{31}{36}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{31}{36}\cdot\frac{5}{6}} = \frac{31}{61}\ ;$$

per cui $x = p\,S = (31/61)\ S$. Come sopra, ovviamente.

[3] Molti studiosi, tra i quali Castelnuovo [1, pag. 30], attribuiscono al siciliano Francesco Paolo Cantelli l'introduzione del concetto di variabile casuale. Il russo Gnedenko [4, pag. 10] la attribuisce invece agli scienziati russi P. L. Čebyšev (1821-1894), A. A. Markov (1856-1922) e A. M. Ljapunov (1857-1918). Certamente questi studiosi hanno svolto un ruolo di primo piano nello sviluppo del calcolo delle probabilità.

Nei lavori di Pascal e Fermat, ma anche in quelli di Huygens, Bernoulli e soprattutto di De Moivre ci sono le basi del calcolo delle probabilità, ma chi di questo calcolo fece una teoria completa fu il marchese **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827). I suoi risultati, compresa quella che consideriamo la definizione classica della probabilità, sono contenute in due opere diventate veri e propri classici: la *Théorie analytique des probabilités* (1812) ed *Essai philosophique des probabilités* (1814).

Ricordiamo la ***definizione di probabilità nella concezione classica***:

La ***probabilità*** di un evento casuale è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli ad esso ed il numero dei casi possibili, supposti *equiprobabili*.

**3. Concezione frequentista**.

La concezione classica della probabilità sembra inficiata da un circolo vizioso: infatti, per calcolare la probabilità di un evento casuale bisogna sapere che i casi possibili hanno la stessa probabilità, ma per questo bisogna saper calcolare la probabilità.

In realtà, secondo i sostenitori della concezione classica della probabilità, questo circolo vizioso è superabile in molte situazioni in cui, soprattutto per ragioni di simmetria, nulla fa supporre che un caso sia più favorevole di un altro, per cui è possibile ritenere *a priori* con ragionevolezza che gli eventi elementari siano equiprobabili. Come, per esempio: estrazione di una pallina da un'urna, lancio di una moneta "onesta" o di un dado "onesto", e così via.

Va precisato che questi sostenitori assumono il concetto "stessa probabilità" o meglio "stessa possibilità" come concetto primitivo.

Ma, detto questo, le situazioni in cui si può applicare la definizione classica, pur essendo numerose ed interessanti, sono in ogni caso poche, specialmente rispetto a quelle che hanno rilevanza in problemi concreti e reali, attinenti soprattutto all'economia, alle scienze sperimentali, alla vita sociale in genere.

Ne cito qualcuna, a titolo di esempio.

Calcolare la probabilità che:

- un bullone, scelto a caso in una partita di 10.000 bulloni, sia difettoso;
- una persona, scelta a caso fra gli automobilisti di una determinata città, subisca un incidente automobilistico nel prossimo anno;
- un uomo di 80 anni viva fino all'età di 90 anni.

In problemi di questo tipo non è possibile valutare preventivamente se gli eventi siano o no equiprobabili.

Problemi siffatti non si possono risolvere ricorrendo alla definizione classica di probabilità. Di fatto, in queste circostanze si ricorre alla cosiddetta *definizione frequentista*.

Questa definizione è connessa ad un principio suggerito dall'esperienza, denominato **legge empirica del caso**:

*La frequenza f di un evento casuale, di probabilità p in senso classico, pur variando al variare del numero N delle prove, effettuate tutte nelle medesime condizioni, al crescere di N si approssima, benché non in modo regolare, alla probabilità p dell'evento.*

La concezione frequentista della probabilità estende questo principio anche ai casi in cui non si conosce la probabilità dell'evento, anzi lo utilizza proprio per una nuova definizione di probabilità.

Ecco, dunque, la ***definizione frequentista*** (o ***statistica*** o ***empirica***) ***di probabilità***:

La ***probabilità*** di un evento casuale è il rapporto fra il numero di volte in cui l'evento si verifica ed il numero di prove effettuate tutte nelle medesime condizioni, cioè è la frequenza dell'evento.

La concezione frequentista della probabilità nasce, almeno a livello implicito, quasi certamente anch'essa con i giocatori d'azzardo, che avevano modo di riflettere sugli esiti di molte prove. In effetti, ripensando al Cavaliere di Méré o a Cosimo II dei Medici, possiamo ipotizzare che solo l'osservazione di un gran numero di prove poteva portarli a fare le congetture che facevano. Ma questa concezione comparve esplicitamente solo nel XVII secolo con lo sviluppo della statistica: sono, infatti, i registri delle natalità, delle mortalità e dei matrimoni nelle grosse città che consentono quelle osservazioni concrete che stanno alla base della concezione frequentista della probabilità. Il ruolo delle assicurazioni fece poi da moltiplicatore d'interesse per la questione.

Nel carteggio tra Pascal e Fermat non c’è alcun riferimento alla “frequenza” degli eventi. Questo concetto compare in Jakob Bernoulli, precisamente nelle sue *Annotationes* al *De Ratiociniis* di Huygens.

La concezione frequentista si afferma definitivamente nell’Ottocento e si consolida nei primi anni del Novecento. I maggiori contributi al riguardo vennero dai francesi **Antoin Augustin Cournot** (1801-1877) e **August Bravais** (1811-1863), dall’inglese **Karl Pearson** (1857-1936) e dagli italiani **Guido Castelnuovo** (1865-1952) e **Francesco Paolo Cantelli** (1875-1966).

Ma chi operò una sistemazione teorica della concezione frequentista della probabilità fu **Richard von Mises** (1883-1953), scienziato austriaco naturalizzato statunitense, il quale apportò un importante correttivo alla precedente definizione frequentista di probabilità.

Questa la definizione di von Mises:

La ***probabilità*** di un evento è il limite cui tende la frequenza relativa dei successi dell’evento al tendere all’infinito del numero delle prove.

In simboli, se in n prove l’evento E si verifica m volte, la probabilità di E è la seguente:

$$p(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}.$$

All’atto pratico, per il calcolo di p(E), si considera un numero sufficientemente elevato di prove.

Alla definizione frequentista di probabilità si può ricorrere sia quando si conosce la probabilità classica di un evento sia quando questa non si conosce. A condizione che si riesca ad eseguire l’esperimento per un numero adeguato di volte e tutte nelle medesime condizioni.

### 4. Concezione soggettiva.

Non c’è dubbio che la definizione frequentista della probabilità si possa applicare ad un numero di situazioni maggiore rispetto al numero delle situazioni in cui si può applicare la definizione classica, pur con dei limiti, derivanti essenzialmente dal fatto che le varie frequenze sono solitamente differenti e solo in un numero molto grande di prove tendono a stabilizzarsi. Ed in più di una situazione non è né comodo né economico fare molte prove. Ad ogni modo, pur senza considerare queste difficoltà, ci sono delle situazioni in cui neanche la definizione frequentista funziona.

Qualche esempio.

Calcolare la probabilità che:

- nel prossimo incontro di calcio Juventus-Barcellona vinca la Juventus;
- Piero sia interrogato in matematica nella prossima lezione;
- i coniugi Carla e Mario divorzino entro i prossimi due anni.

In tali situazioni la ripetitività delle prove ha poco significato e pertanto neanche la concezione frequentista della probabilità funziona. Meno che mai funziona la concezione classica.

Situazioni come queste si affrontano ricorrendo alla ***definizione soggettiva*** di probabilità:

La ***probabilità***, che un soggetto attribuisce ad un evento casuale, è il numero p=**s’/S**, dove s' è la somma che egli stima equo scommettere a condizione di riscuotere la somma S se l’evento si verifica, essendo S la somma complessiva della puntata s' e del guadagno ottenuto S–s’.

Per esempio, quando affermo che «domani al 60% pioverà», intendo dire che, in una scommessa, sono disposto a pagare, tanto per dire, 6 euro a condizione di riscuoterne 10 se effettivamente pioverà. Con un guadagno, quindi, di 4 euro. Per l’appunto, la probabilità è: $p = 6/10 = 60\%$ .

Sostanzialmente quindi ci sono due scommettitori (io e un altro soggetto) che accettano le condizioni; vale a dire che al 60% domani pioverà. Se allora io punto 6 euro sull’evento “domani pioverà”, l’altro scommettitore punta 4 euro sull’evento contrario “domani non pioverà”, cui si attribuisce la probabilità del 40%, in modo che il gioco sia equo. Chi vince prende tutta la posta, vale a dire 10 euro.

Detto per inciso, il gioco è *equo* se, essendo P la probabilità di vincita di chi punta la somma S e P’ la probabilità di vincita di chi punta la somma S’, si ha: $P/P' = S/S'$.

In tal caso, evidentemente, chi punta la somma S ha la probabilità P di guadagnare la somma S’ e la probabilità P’ di perdere la somma S.

La teoria della probabilità secondo l’impostazione soggettiva si è sviluppata tutta nel secolo scorso ed ha avuto all'inizio come attori principali due giovani studiosi, l'inglese **Frank Plumpton Ramsey** (1903-1930) e l'italiano **Bruno de Finetti** (1906-1985).

Ramsey, matematico, logico ed economista, morto a poco più di 26 anni, ne fornì una prima formulazione in un saggio dal titolo *Truth and Probability* (*Verità e Probabilità*), composto nel 1926, ma pubblicato postumo nel 1931. Il valore dell'opera di Ramsey non fu riconosciuto che qualche tempo dopo.

De Finetti incominciò ad occuparsi della probabilità soggettiva giovanissimo fin dalla fine degli anni '20 e ne gettò le basi fin dal 1937 con un articolo in francese dal titolo *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives*. La sua opera *Teoria delle Probabilità* (1970), costituisce un fondamentale punto di riferimento per i probabilisti, soggettivisti e no.

La teoria della probabilità soggettiva fu sviluppata anche dal matematico e statistico statunitense **Leonard Jimmie Savage** (1917-1971) nella sua opera dal titolo *Foundations of Statistics* del 1954, nella quale egli attribuisce a de Finetti la paternità del concetto di probabilità soggettiva. A lui va il merito di aver diffuso quegli aspetti della teoria di de Finetti riguardanti il suo impiego nei problemi di statistica.

### 5. Assiomatizzazione della probabilità.

Ci sarebbero, dunque, almeno tre definizioni di probabilità: classica, frequentista, soggettiva. Francamente sono un po' troppe. Cosa che, assieme ad altri motivi per la verità, faceva dire a de Finetti che "*la probabilità non esiste*".

Bisogna annotare tuttavia che, dal punto di vista dei "probabilisti soggettivisti", l'unica definizione di probabilità accettabile è quella soggettiva, che effettivamente è la più generale, mentre le altre sono, a loro giudizio, valutazioni della probabilità che si collocano come casi particolari della valutazione soggettiva, applicabili peraltro in situazioni eccezionali. Questa interpretazione trova molti proseliti, specialmente in Italia, e tutti provenienti in linea diretta o indiretta dalla scuola di de Finetti.

Tra coloro che si mostrano fortemente critici nei confronti della concezione soggettiva della probabilità, i più si trovano fuori dell'Italia e particolarmente in Russia. Riporto un passo tratto da [4, pagg. 19-20]:

« *Se la probabilità matematica fosse una misura quantitativa del grado di certezza del ricercatore, allora la teoria della probabilità si ridurrebbe a qualcosa affine alla psicologia*; [...]

« *Infatti, se si assume che la valutazione della probabilità è collegata esclusivamente allo stato del ricercatore, allora tutte le conclusioni tratte da asserzioni probabilistiche [...] sono private del loro contenuto oggettivo, che è indipendente dal ricercatore*. [....]

« *Per tutti coloro che assumono una realtà esistente indipendentemente da noi e l'essenziale conoscibilità del mondo esterno, deve essere assolutamente chiaro che una definizione di probabilità matematica puramente soggettiva è del tutto inconsistente* ».

Ultimamente, quella che sembra affermarsi è la teoria assiomatica, sia in uno studio elementare della probabilità sia soprattutto in uno studio avanzato, benché proprio come critica alla teoria assiomatica de Finetti mostrò che le basi della probabilità possono essere altre.

L'assiomatizzazione della probabilità fu proposta da David Hilbert (1862-1943) al 6° posto della sua celebre lista di 23 problemi, presentata a Parigi nel 1900 in occasione del 2° Congresso Internazionale dei Matematici. In realtà, il 6° problema è presentato come *matematizzazione della fisica*. Ma l'idea di Hilbert era che fossero assiomatizzate, come egli aveva fatto con la geometria, quelle parti della fisica in cui la matematica svolge un ruolo fondamentale, come, per esempio, la teoria cinetica dei gas e, di riflesso, la teoria della probabilità che le fa da supporto.

Effettivamente, i primi tentativi di assiomatizzare la probabilità furono fatti nel 1909 dal francese **Émile Borel** (1871-1956) e ripresi qualche anno dopo, nel 1923, dal polacco **Antoni Łomnicki** (1881-1941).

Ma fu il matematico russo **Andrei Nikolaevič Kolmogorov** (1903-1987) che formulò una prima teoria assiomatica della probabilità con la pubblicazione del libro *A general theory of measure and the calculus of probabilities* (1929). La definitiva sistemazione fu ancora opera di Kolmogorov, che nel 1933 pubblicò in Germania quello che è ormai un classico della matematica e un punto di riferimento per tutti i probabilisti: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Concetti fondamentali del calcolo delle probabilità*).

Ecco un breve cenno a questa teoria, limitato però al caso degli spazi campionari finiti.

Sia $\Omega$ un insieme di *eventi semplici*. $\Omega$ è detto *spazio campionario* (o *spazio di prova*). Supponiamo che sia un insieme finito. Sia poi $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\Omega$ tale che:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

2) se $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ allora $A \cup B \in \mathcal{F}$, $\overline{A} \in \mathcal{F}$, $\overline{B} \in \mathcal{F}$, essendo A e $\overline{A}$ due eventi tali che $A \cup \overline{A} = \Omega$ e $A \cap \overline{A} = \Omega$ ed analogamente per B e $\overline{B}$.

$\mathcal{F}$ è denominato *spazio degli eventi* e i suoi elementi si chiamano *eventi casuali*.

Si dimostra che se $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ allora $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Si hanno le seguenti definizioni:

- l'evento casuale $\Omega$ si dice *evento certo*, l'evento casuale $\emptyset$ si dice *evento impossibile*;
- due eventi casuali A, B si dicono *(mutuamente) incompatibili* se $A \cap B = \emptyset$;
- l'evento casuale A e l'evento casuale $\overline{A}$ si dicono *eventi contrari* (o *opposti*).

Si assumono i seguenti assiomi:

1) Ad ogni evento casuale $A \in \mathcal{F}$ è associato uno ed un solo numero reale non negativo, indicato con P(A), detto *probabilità* di A.

2) $P(\Omega) = 1$.

3) Se gli eventi casuali $A_j$ ($j=1,2,\ldots,n$) di $\mathcal{F}$ sono incompatibili due a due allora:

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)\,.$$

Sulla base di questi assiomi si sviluppa la teoria della probabilità, almeno nel caso "finito".

**6. Probabilità geometrica e Metodo Monte Carlo**.

È d'obbligo un cenno a quest'interessante aspetto della probabilità.

Si consideri allora un sistema di punti di una figura geometrica F di misura definita (una superficie, un solido, un segmento perfino – in figura 2 si è scelta una superficie), nella quale è contenuta un'altra figura F', essa pure di misura determinata (anche nulla, eventualmente). Scelto casualmente un punto della figura F, la probabilità p che esso appartenga alla figura F', che può essere denominata ***probabilità geometrica***, è:

$$\mathbf{p} = \frac{\textbf{misura di F}'}{\textbf{misura di F}}\,.$$

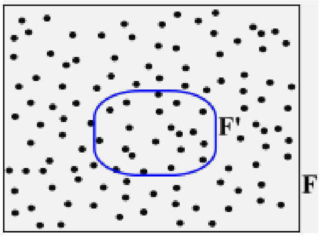

figura 2

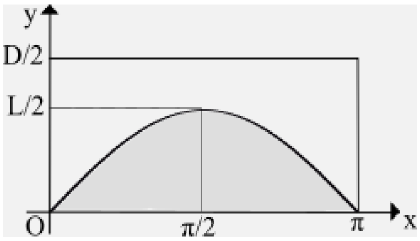

figura 3

- Il primo problema che è stato risolto ricorrendo alla probabilità geometrica è stato il celebre ***problema dell'ago di Buffon***. Figura nell'opera *Essai de arithmétique morale* (1777) del naturalista e matematico francese **Georges Louis Leclerc**, conte di Buffon (1707-1788).

Questo è il problema, tradotto in termini matematici: *Sia dato in un piano un insieme di rette parallele poste alla stessa distanza* D *l'una dall'altra. Un "ago" di lunghezza* L *assegnata* (L<D) *è fatto cadere a caso sulle rette. Calcolare la probabilità che esso intersechi una delle rette dell'insieme*.

Una volta risolto il problema, si conclude che la probabilità p cercata è uguale al rapporto fra l'area sotto il grafico della funzione $y=\frac{L}{2}\sin x$, relativa all'intervallo $[0, \pi]$, e l'area del rettangolo di lati D/2 e $\pi$ (figura 3). Pertanto, a conti fatti:

$$p = \frac{2\,L}{\pi\,D}\,.$$

- Un altro problema, risolto col ricorso alla probabilità geometrica, è quello che è passato alla storia come "paradosso di Bertrand". Fu proposto dal matematico francese **Joseph Louis François Bertrand** (1822-1900) nel suo *Calcul des probabilités* (1889).

Questo è il problema: *Calcolare la probabilità che una corda, scelta casualmente in un cerchio, abbia lunghezza maggiore del lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio*.

Si parla di paradosso perché Bertrand ne diede tre soluzioni diverse e tutte e tre "buone", cosa che ovviamente creò sconcerto.

Fu spiegato in seguito che il problema non era ben definito e che non di soluzioni di uno stesso problema si trattava, bensì delle soluzioni di tre problemi diversi, per cui, in realtà, il paradosso non esiste.

Esattamente la diversità è determinata dalle caratteristiche della corda. Precisamente:

1) se della corda si fissa il suo punto medio, la probabilità è $p_1=1/4$;
2) se della corda si fissa un estremo, la probabilità è $p_2=1/3$;
3) se della corda si fissa la direzione, la probabilità è $p_3=1/2$.

- Il ricorso alla probabilità geometrica è un buon metodo per ottenere stime di una grandezza geometrica, come per esempio un'area A di una superficie F' contenuta in un'altra superficie F di area S (figura 2). Si tratta di "bombardare" con un numero elevato N di "proiettili" la superficie F e contare il numero n di quei proiettili che cadono all'interno della superficie F'. Risulta, con buona approssimazione:

$$\frac{A}{S} \approx \frac{n}{N} \quad \text{da cui segue:} \quad A \approx \frac{n}{N}\, S\,.$$

L'approssimazione migliora se si fanno più prove e si calcola la media aritmetica dei risultati trovati.

Questo metodo di calcolo approssimato sperimentale, le cui potenzialità erano emerse fin dalla fine del Settecento, trovò una sua formalizzazione solo durante la seconda guerra mondiale, all'interno del Progetto Manhattan, progetto che portò gli USA alla costruzione della prima bomba atomica nei laboratori di Los Alamos (New Mexico). Fu in questo contesto che il metodo, in relazione proprio al Casinò di Montecarlo, ritenuto uno dei simboli del gioco d'azzardo, fu denominato ***Metodo Monte Carlo*** da uno degli scienziati che collaboravano al progetto, **Nicholas Costantine Metropolis** (1915-1999), fisico statunitense di origine greca.

## 7. Probabilità e grafi.

A quanto esposto bisogna aggiungere che la teoria dei grafi ha migliorato le tecniche di risoluzione dei problemi di probabilità. Ne è un esempio la risoluzione del già esaminato problema di Huygens (vedi fig. 1).

Questa teoria è nata con lo studio di **Leonhard Euler** (1707-1783) sul celebre *problema dei ponti di Königsberg* e in particolare con la sua risoluzione, avventa nel 1736.

La teoria ebbe contributi anche dal già citato Ramsey in un'opera del 1928 dal titolo *On a Problem of Formal Logic* (*Su un problema di logica formale*).

Ma solo nella seconda metà del Novecento, con l'avvento dell'informatica e la rivalutazione del calcolo combinatorio, è diventata un capitolo importante della matematica e un supporto utile al calcolo delle probabilità.

Attenzione! Questo non vuol significare che tutti i problemi di probabilità si semplifichino con l'utilizzo dei grafi. Certamente no. Ci sono infatti problemi che si risolvono più semplicemente con altri strumenti (tabelle, calcolo combinatorio, insiemi, geometria, eccetera). Vuol dire, molto banalmente, che "certi" problemi si risolvono più facilmente utilizzando opportuni grafi.

Ma non è questa la sede per un approfondimento dell'argomento e la chiudo qui.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. CASTELNUOVO, *Calcolo delle probabilità*, vol. I, III edizione, Bologna, Zanichelli, 1961.
[2] P. DUPONT, *Primo incontro con la probabilità*, Torino, S.E.I., 1985.
[3] A. GIAMBO' – R. GIAMBO', *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.
[4] B. V. GNEDENKO, *Teoria della probabilità*, Roma, Editori Riuniti, 1986.