Ancora sui quaternioni

di Antonino Giambò

1. Leggendo l'articolo *I quaternioni di Hamilton*, che l'amico Domenico Bruno ha pubblicato di recente su questa medesima rubrica, mi sono ritornati alla mente alcuni interrogativi che si sono posti i matematici di quell'epoca subito dopo la costruzione di Hamilton:

a) Quale processo mentale ha condotto Hamilton a creare i quaternioni?

b) I quaternioni hanno un'interpretazione geometrica come i numeri complessi, di cui sono un'estensione?

Ecco, lo scopo di questo contributo è proprio quello di fornire risposte a queste due domande.

Naturalmente, per tutto ciò che concerne altri aspetti dei quaternioni, rimando all'articolo succitato.

2. Riguardo al primo interrogativo, sembra che la motivazione sia da ricercarsi nell'indagine, condotta da Hamilton, mirata ad ampliare il campo dei numeri complessi in modo da ottenere un insieme numerico che contenesse quell'insieme, a meno di un isomorfismo aritmetico.

In questo tentativo, pare certo che Hamilton abbia provato l'ampliamento dapprima con "numeri complessi" a 3 componenti (a, b, c), vale a dire con oggetti del tipo seguente:

$$a + b\,i + c\,j\,,$$

dove a, b, c sono numeri reali, mentre i e j sono unità immaginarie, tali cioè che sia: $i^2 = j^2 = -1$.

Con questi nuovi oggetti, l'operazione di addizione non comportava difficoltà. Basta definirla, infatti, nel modo seguente, in analogia alla medesima operazione nell'insieme dei numeri complessi:

$$(a + b\,i + c\,j) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')\,i + (c + c')\,j.$$

E il nuovo insieme, che per comodità indichiamo con H_3, strutturato con questa operazione di addizione, è un gruppo commutativo, in cui l'elemento neutro è $(0,0,0)$.

Le cose però vanno a rotoli con la moltiplicazione. Infatti, ammettendo che siano conservate le proprietà formali dell'operazione, valide nell'insieme dei complessi, si ha:

$$(a + b\,i + c\,j)\cdot(a' + b'i + c'j) = (aa' - bb' - cc' - bc' - cb') + (ab' + ba')\,i + (ac' + ca')\,j.$$

Ma quest'operazione, pur definita nell'insieme H_3 non conferisce all'insieme alcuna struttura particolarmente significativa, a parte la presenza dell'elemento neutro $(1,0,0)$.

Probabilmente fu a questo punto che Hamilton ebbe l'intuizione [1] di inserire una terza unità immaginaria, k, precisando nel contempo le relazioni che legano le tre unità i, j, k, e che sono sintetizzate nella seguente tabella (tabella 1):

$\cdot$	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

tabella 1

dalla quale si desume pure che si ha: $i\,j\,k = -1$.

Insomma, esplicitando:

$$i^2 = j^2 = k^2 = i\,j\,k = -1,\;\; i\,j = k,\;\; j\,k = i,\;\; k\,i = j,\;\; j\,i = -k,\;\; k\,j = -i,\;\; i\,k = -j.$$

Su questa base Hamilton costruì i quaternioni, ossia oggetti a 4 componenti (a, b, c, d) o, come si dice, di dimensione 4; vale a dire oggetti del tipo seguente:

---

[1] Si narra che Hamilton ebbe l'ispirazione mentre, a passeggio con la moglie, attraversava quello che all'epoca si chiamava ponte Brougham (oggi Broom Bridge) sul Royal Canal, a Dublino. Ci si può credere o no. Quello che è certo è che su un lato di quel ponte è situata una lapide che recita così:

« *Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula forquaternion multiplication* $i^2 = j^2 = k^2 = i\,j\,k = -1$ *& cut it on a stone of this bridge*. »

(*Mentre qui passeggiava, il 16 ottobre 1843 Sir William Rowan Hamilton, in un lampo d'ispirazione scoprì la formula fondamentale per la moltiplicazione dei quaternioni* $i^2 = j^2 = k^2 = i\,j\,k = -1$ *e la incise su una pietra di questo ponte.*)

$$a + b\,i + c\,j + d\,k\,,$$

dove a, b, c, d sono numeri reali.

Il loro insieme è indicato con $\mathbb{H}$. Domenico Bruno ne ha scritto diffusamente nel suo articolo ed a quello rimando. Ma credo possa interessare qualche ulteriore considerazione.

Per esempio, il quaternione può essere messo nella forma seguente:

$$(a + b\,i) + (c + d\,i)\,j\,,$$

che lo mostra come "numero complesso con coefficienti numeri complessi", il che rende legittima la denominazione di *numeri ipercomplessi* data ai quaternioni di Hamilton.

Una volta conosciuto il nuovo sistema di numeri, si notò subito un fatto che all'epoca apparve strabiliante, addirittura scandaloso secondo alcuni algebristi, tra i quali il matematico inglese George Peacock (1791-1858), i quali per questo criticarono fortemente la costruzione di Hamilton. Di cosa si trattava?

Fino alla scoperta dei quaternioni, tutte le più importanti strutture numeriche – $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ – si erano rivelate dei *corpi commutativi*, detti anche *campi*.

Invece, la struttura $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ si presentava come un *corpo non commutativo*, altrimenti detto *corpo sghembo*.

Era il primo esempio del genere e, nonostante le critiche degli scettici, altri studiosi si mostrarono entusiasti della scoperta e si diedero a ricercare se esistessero altre strutture simili.

Ci riuscì l'inglese Arthur Cayley (1821-1895), il quale dimostrò che le matrici quadrate "regolari" di uno stesso ordine, strutturate con le operazioni "somma" e "prodotto", erano modelli di corpi non commutativi. I suoi risultati sull'argomento sono contenuti nell'articolo *A Memoir on the Theory of Matrices* (*Memoria sulla Teoria delle Matrici*), pubblicato nel 1858.

A titolo di esempio, consideriamo l'insieme M_2 delle matrici quadrate del 2° ordine, con elementi in $\mathbb{R}$ e introduciamo in esso le due operazioni "+" e "· ", così definite:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{Vmatrix}$$

Ebbene, le strutture algebriche $(M_2, +), (M_2, \cdot), (M_2, +, \cdot)$ sono nell'ordine un *gruppo commutativo*, un *monoide non commutativo*, un *anello non commutativo dotato di elemento unità* [2]. Per completezza, l'elemento neutro rispetto all'addizione e quello rispetto alla moltiplicazione sono rispettivamente le matrici seguenti:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Le matrici dell'insieme M_2 non sono regolari, vale a dire che, considerata la generica matrice:

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix},$$

il suo determinate $D = ad - bc$ può essere anche nullo.

Se, però, quel determinante è diverso da zero, allora la matrice si dice *regolare*.

Ebbene, considerato l'insieme $M_2^{(r)}$ delle matrici quadrate regolari del 2° ordine, la struttura algebrica $\left(M_2^{(r)}, +, \cdot\right)$ è esattamente un corpo non commutativo.

3. Cayley, per la verità, si era occupato dei quaternioni già prima di pubblicare l'articolo sulle matrici. Lo aveva fatto pubblicando a Londra, nel 1845, all'età di 23 anni, l'articolo *On certain Results relating to Quaternions* (*Su alcuni Risultati relativi ai Quaternioni*), nel quale dava un'interpretazione geometrica dei quaternioni, interpretazione alla quale quasi certamente stava lavorando lo stesso Hamilton, che però veniva

[2] È il primo esempio di anello non commutativo che si conosca.

anticipato da Cayley [3]. Questo fatto segnava comunque un punto a favore di coloro che valutavano positivamente la scoperta dei nuovi oggetti.

Per comprendere come ciò sia avvenuto è utile prendere le mosse dalla rappresentazione geometrica dei numeri complessi.

È noto che questa rappresentazione può essere ottenuta nel piano di Gauss-Argand-Wessel, identificando il numero complesso $(a, b) = a + ib$ con il vettore $\overrightarrow{OP}$, dove O è l'origine del piano e P il punto di coordinate (a, b) (figura 1).

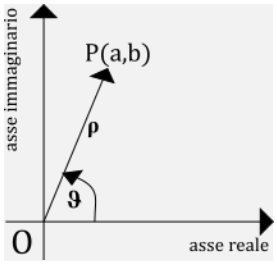

figura 1

Ricordando la rappresentazione trigonometrica del numero complesso (a, b), ossia: $\rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, dove $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \operatorname{atan}\frac{b}{a}$, poniamo l'attenzione sul numero complesso unitario $\cos\theta + i\sin\theta$. Ebbene, moltiplicando per questo numero un qualsiasi numero complesso $(x, y) = x + i\,y$, immagine del vettore $\overrightarrow{OW}$, dove W ha coordinate (x, y), si ottiene il numero complesso z tale che:

$$z = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i\,(x\sin\theta + y\cos\theta)\,,$$

ossia il numero complesso di componenti:

[1] $$x' = x\cos\theta - y\sin\theta\,, \quad y' = x\sin\theta + y\cos\theta\,.$$

Questo numero complesso z ha dunque come immagine il vettore $\overrightarrow{OW'}$, ruotato di un angolo θ intorno ad O (figura 2). Di fatto, le [1] sono proprio le equazioni della rotazione di ampiezza θ intorno ad O.

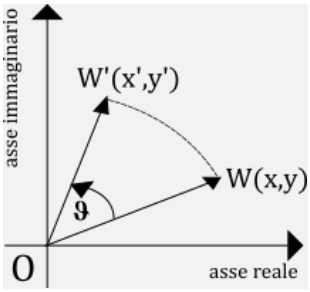

figura 2

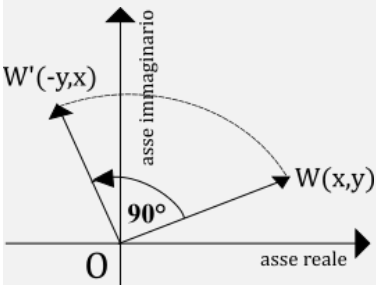

figura 3

In particolare, se $\theta = 90°$, per cui $\cos\theta + i\sin\theta = i$, moltiplicando per i il numero complesso $x + iy$, immagine del vettore si ottiene $\overrightarrow{OW}$, dove W ha coordinate (x, y), si ha il numero complesso $-y + ix$, immagine del vettore $\overrightarrow{OW'}$ di coordinate $(-y, x)$, ossia il vettore ottenuto ruotando $\overrightarrow{OW}$ di un angolo di 90° intorno ad O (figura 3).

Insomma, *un numero complesso unitario*, $\cos\theta + i\sin\theta$, *definisce una rotazione nel piano, di ampiezza* θ, *intorno alla sua origine*.

---

[3] Benché il primo libro pubblicato da Hamilton sui quaternioni – *Lectures on Quaternions* (*Lezioni sui Quaternioni*) – risalga al 1853, già nel 1843 il matematico irlandese aveva comunicato alla Royal Irish Academy i principi basilari della sua scoperta.
Inoltre, fra il 1844 e il 1850, egli pubblicò in 18 puntate su una rivista londinese, la prima versione della sua scoperta con il titolo *On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra* (*Sui Quaternioni; o su un nuovo Sistema di Immaginari in Algebra*).
Questo, per dire che Cayley, nel 1845, era a conoscenza della scoperta di Hamilton.

Ebbene, Cayley riuscì a dare una rappresentazione dei quaternioni nello spazio ordinario riferito ad un sistema di assi cartesiani. Egli, precisamente, pensò che. allo stesso modo in cui un numero complesso era interpretato come una rotazione nel piano, così un quaternione poteva essere interpretato come una rotazione nello spazio tridimensionale.

Esponiamo in forma molto succinta il ragionamento di Cayley.

Sono necessarie anzitutto alcune definizioni, che in parte sono presenti nell'articolo di Bruno, ma che qui riporto per comodità.

È dato il quaternione:

$$q = a + b\,i + c\,j + d\,k\,.$$

Si definisce:

- *quaternione puro* ogni quaternione la cui parte reale sia nulla, vale a dire ogni quaternione del tipo:
$$p = b\,i + c\,j + d\,k\,;$$
- *quaternione coniugato* di q il quaternione, indicato con $\overline{q}$, tale che:
$$\overline{q} = a - b\,i - c\,j - d\,k\,;$$
- *norma* di q il numero reale non negativo, indicato con $|q|$, tale che:
$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\,;$$
- *quaternione unitario* ogni quaternione di norma uguale ad 1;
- *quaternione inverso* di q (purché $q \neq 0$) il quaternione, indicato con q^{-1}, tale che:
$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}\,.$$
Si costata facilmente che il quaternione inverso di un quaternione unitario coincide con il coniugato del quaternione unitario.

Possiamo passare adesso alla rappresentazione geometrica dei quaternioni.

Supponiamo che lo spazio ordinario $\mathbb{R}^3$ sia riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (O i j k) (figura 4). È possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i suoi punti e i quaternioni puri: basta associare ogni punto $P(x,y,z)$ di $\mathbb{R}^3$ al quaternione $p = x\,i + y\,j + z\,k$.

Punto e quaternione sono evidentemente associati anche al vettore $\overrightarrow{OP}$.

Ebbene, questa la conclusione alla quale pervenne Cayley:

Ogni quaternione unitario $u = a + b\,i + c\,j + d\,k$ definisce una rotazione in $\mathbb{R}^3$ intorno alla retta passante per i punti $(0,0,0)$ e (b,c,d), avente ampiezza $\theta = 2\arccos a$.

Esattamente, il quaternione unitario u trasforma il vettore $\overrightarrow{OP}$, associato al quaternione puro $p = x\,i + y\,j + z\,k$, nel vettore $\overrightarrow{OP'}$, associato al quaternione $w' = u \cdot p \cdot u^{-1}$, che si dimostra essere, a sua volta, un quaternione puro.

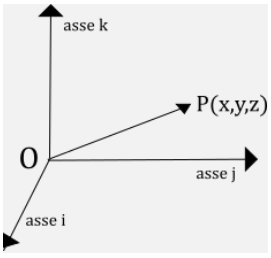

figura 4

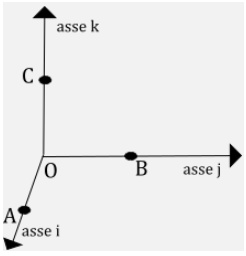

figura 5

Vediamo un paio di esempi.

- Consideriamo come primo esempio il quaternione u tale che:
$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}k\,.$$

La sua norma è:

$$|u| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Si tratta dunque di un quaternione unitario. Esso definisce la rotazione intorno alla retta passante per l'origine e per il punto $\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, cioè intorno all'asse k. Questa rotazione ha ampiezza $\theta = 2\,\mathrm{acos}\frac{1}{\sqrt{2}} = 90°$.

Questo in base alla conclusione di Cayley, ma noi vogliamo darne una giustificazione diretta.

Consideriamo allora un generico vettore $\overrightarrow{OP}$, dove $P(x,y,z)$, associato al quaternione puro $p = xi + yj + zk$, e troviamo il vettore $\overrightarrow{OP'}$, dove $P'(x',y',z')$, associato al quaternione puro $p' = x'i + y'j + z'k$, in modo che risulti: $p' = u \cdot p \cdot u^{-1}$. Si tratta dunque di calcolare x', y', z'.

Si ha in sequenza:

$$p' = u \cdot p \cdot u^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}k\right) \cdot (xi + yj + zk) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}k\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x - y - x - y)\,i + (x + y + x - y)\,j + (2\,z\,k)\right] = -y\,i + x\,j + z\,k\,.$$

Pertanto:

$$x' = -y,\ \ y' = x,\ \ z' = z\,.$$

E queste sono, di fatto, le equazioni della rotazione di 90° intorno all'asse k.

In particolare questa rotazione trasforma (figura 5):

- il vettore $\overrightarrow{OA}$, dove $A(1,0,0)$, associato al quaternione puro i, nel vettore $\overrightarrow{OB}$, dove $B(0,1,0)$, associato al quaternione puro j;
- il vettore $\overrightarrow{OB}$, nel vettore $\overrightarrow{OA'}$, dove $A'(-1,0,0)$, associato al quaternione puro $-i$;
- il vettore $\overrightarrow{OC}$, dove $C(0,0,1)$, associato al quaternione puro k, in se stesso;
- il vettore $\overrightarrow{OW}$, dove $W(1,-1,2)$, associato al quaternione puro $w = i - j + 2k$, nel vettore $\overrightarrow{OW'}$, dove $W'(1,1,2)$, associato al quaternione puro $w' = i + j + 2k$.

- Come secondo esempio consideriamo il quaternione v tale che:

$$v = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k\,.$$

La sua norma è:

$$|v| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

Si tratta dunque di un quaternione unitario. Esso definisce la rotazione intorno alla retta r passante per l'origine e per il punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, avente ampiezza $\theta = 2\,\mathrm{acos}\frac{1}{2} = 120°$. In particolare, la rotazione trasforma (figura 6):

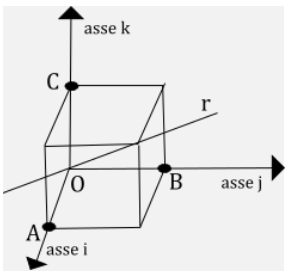

figura 6

- il vettore $\overrightarrow{OA}$, dove $A(1,0,0)$, associato al quaternione puro i, nel vettore $\overrightarrow{OB}$, dove $B(0,1,0)$, associato al quaternione puro j;
- il vettore $\overrightarrow{OB}$ nel vettore $\overrightarrow{OC}$, dove $C(0,0,1)$, associato al quaternione puro k;
- il vettore $\overrightarrow{OC}$ nel vettore $\overrightarrow{OA}$;

- il vettore $\overrightarrow{OP}$, dove $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, associato al quaternione puro $\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k$, in se stesso.

Dimostriamo la prima di queste trasformazioni. Per questo occorre far vedere che si ha: $v\cdot i\cdot v^{-1}=j$.

Di fatto, ricordando che $v^{-1}=\overline{v}$:

$$v\cdot i\cdot v^{-1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}k\right)\cdot i\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k\right)=\frac{1}{4}\cdot 4j=j\,.$$

Oggigiorno i quaternioni, interpretati come rotazioni in $\mathbb{R}^3$, trovano applicazioni in diversi campi, oltre che in matematica, e in particolare in fisica, in cristallografia, in computer grafica. Con scorno di quanti si erano scandalizzati per la loro scoperta. E ciò nonostante lo "scontro di notazioni" tra quaternioni e calcolo vettoriale, che vide soccombenti i quaternioni e di cui parla anche Carlo Bernardini (1930-2018), noto fisico e divulgatore scientifico, scomparso qualche anno fa [4].

4. Ma, ritornando a Cayley, egli fece qualcosa in più che fornire un'interpretazione geometrica dei quaternioni. Egli infatti generalizzò i quaternioni, costruendo, pochi giorni dopo la pubblicazione già citata, un sistema di numeri ipercomplessi a 8 componenti, i cosiddetti *ottetti di Cayley*. E il nuovo insieme, che indichiamo con $\mathbb{O}$, strutturato con le operazioni "+" e "· ", non era più neppure un corpo, venendo a perdere la proprietà associativa, oltre alla commutativa. Esso, comunque, contiene l'insieme dei quaternioni, a meno di un isomorfismo aritmetico.

Occorre dire, per completezza d'informazione, che gli ottetti furono scoperti, nello stesso anno 1845 e indipendentemente da Cayley, anche dal matematico irlandese John T. Graves (1806-1870), amico di Hamilton.

Non ci soffermiamo su questi nuovi oggetti, così come non lo facciamo per le cosiddette *algebre di Cayley-Dickson* [5], sequenze di sistemi numerici ipercomplessi che – come i quaternioni rispetto ai complessi e come gli ottetti rispetto ai quaternioni – hanno dimensione ciascuna doppia della precedente, ma ognuna di esse perde, rispetto alla precedente, qualche proprietà.

Sulla perdita delle proprietà delle strutture numeriche nel passaggio da una di esse ad un'altra più ampia, mi soffermo per una breve chiosa. In realtà, in tale passaggio accade sempre che si perda almeno una proprietà.

Vediamo una disamina più articolata, tenendo presenti i successivi ampliamenti, qui sotto evidenziati:

$$\mathbb{N}\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\to\mathbb{C}\to\mathbb{H}\to\mathbb{O}$$

L'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali ha un *minimo*, il numero 0. Questo minimo non esiste più nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi.

Nell'insieme $\mathbb{Z}$ ogni numero ha un *successivo*. Proprietà che si perde nel passaggio all'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali.

La proprietà che si perde, nel passaggio dall'insieme $\mathbb{Q}$ all'insieme $\mathbb{R}$ dei reali, è la *numerabilità*.

L'insieme $\mathbb{R}$ è un insieme *totalmente ordinato* rispetto alla relazione "è maggiore". Nell'insieme $\mathbb{C}$ non esiste una elazione d'ordine che conservi l'ordine esistente in $\mathbb{R}$ con le relative proprietà formali.

Nel passaggio da $\mathbb{C}$ ad $\mathbb{H}$ e in quello da $\mathbb{H}$ ad $\mathbb{O}$ abbiamo già detto cosa succede.

[4] Si veda, al riguardo, l'articolo di Emilio Ambrisi, *Relatività in classe, una piccola vicenda per parlarne*, pubblicato su questa medesima rubrica.

[5] Leonard Eugene Dickson, matematico statunitense, 1874-1954.