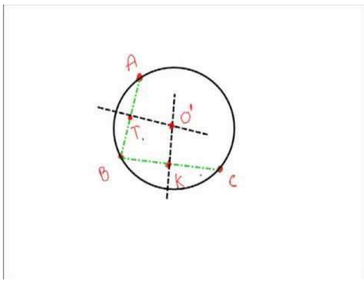
Circonferenza e parabola passanti per tre punti.

A) Dalla Geometria sappiamo che: per tre punti non allineati passa e una sola circonferenza: Riesci a dimostrarlo? (ricorda le proprietà del circocentro di un triangolo)



Proviamo a dimostrare questo risultato con la geometria analitica.
Bisogna fissare un sistema di assi cartesiani ortogonali e considerare tre punti $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ e $C(x_3; y_3)$. Scritta l'equazione della circonferenza………., imponiamo il passaggio per questi punti.
Otteniamo il sistema: $\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = -x_1^2 - y_1^2 \\ ax_2 + by_2 + c = -x_2^2 - y_2^2 \\ ax_3 + by_3 + c = -x_3^2 - y_3^2 \end{cases}$. Quali sono le incognite di questo sistema? Si tratta di un sistema……quindi è determinato ed ha una sola soluzione sse det $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, che rappresenta la condizione affinché i tre punti ……….

B) Vale lo stesso per la parabola, cioè dati tre punti non allineati esiste ed è unica la parabola passante per essi?
Proviamo a vedere se ciò è vero.
Intanto incominciamo col precisare quale tipo di parabola cerchiamo.
Volgliamo le parabole con l'asse parallelo all'asse delle ordinate, quindi quelle aventi equazione……..e prendiamo i punti $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ e $C(x_3; y_3)$.
Incominciamo con l'osservare che: se due di essi avessero la stessa ascissa allora…….Quindi i punti hanno le ascisse tutte….Volendo procedere come nel caso della circonferenza dobbiamo……e quindi otteniamo il sistema $\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{cases}$, tale sistema avrà una ed una sola soluzione sse det $\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Diversamente dal caso della circonferenza, non è semplice sfruttare la condizione che i punti non sono allineati per concludere che il determinante sia diverso da zero.
Come fare?
Possiamo semplificare i conti? Si, basta scegliere, un sistema di riferimento nel quale uno dei punti, per esempio C, coincida con l'origine (è lo stesso che dire che operiamo una traslazione che porta C nell'origine del riferimento).
Quindi il problema è diventato il seguente: Dimostrare che esiste ed è unica la parabola, con asse parallelo all'asse delle ordinate, passante per O,A e B (le ascisse di questi punti sono tutte distinte).

L’equazione generale di questa parabola è……… Imponendo il passaggio per A e B otteniamo il sistema…..il quale ha una sola soluzione sse det $\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 \\ x_2^2 & x_2 \end{vmatrix} \neq 0$ che equivale a dire che…..