Qualche riflessione sui limiti: Somma e prodotto di limiti.

Ricordiamo che:

$f: x \in X \subseteq R \to R$, $x_0, l \in R \cup \{-\infty; +\infty\}$, con x_0 punto di accumulazione per X, allora:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ sse $\forall I(l)\ \exists I(x_0)$ tale che $\forall x \in (I(x_0) - \{x_0\}) \cap X$ si ha $f(x) \in I(l)$

A) **La somma**

Date due funzioni, se esite il limite di ognuno degli addendi esisterà il limite della somma e tale limite sarà la somma dei due limiti?

Quindi: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = h$ allora esiste $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$ e $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + h$?

1) Considera le due funzioni: f(x) $= \frac{1}{x^2}$ e g(x) $= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$. Si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = \ldots$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = \ldots$. Esiste $\lim_{x \to 0} (f(x) + g(x))$?

2) Considera le due funzioni: f(x) $= \begin{cases} x + 1 & se\ x > 0 \\ -x & se\ x \leq 0 \end{cases}$ e g(x) $= \begin{cases} -x + 1 & se\ x > 0 \\ x + 2 & se\ x \leq 0 \end{cases}$. Riguardo i limiti $\lim_{x \to 0} f(x)$ e $\lim_{x \to 0} g(x)$ si ha che.....; mentre $\lim_{x \to 0} (f(x) + g(x)) = \ldots$

Prova a fare altri esempi in cui: esistono i limiti degli addendi, ma non quello della somma e

viceversa, esiste il limite della somma ma non quello degli addendi.

3) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = h \neq \pm\infty$, possiamo affermare che esiste $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$ e che $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + h$? Riesci a dimostrarlo?

4) E' necessario supporre che i limiti siano entrambi finiti? E se almeno uno due limiti non è detto che sia finito vale ancora la proprietà che il limite della somma è uguale alla somma dei limiti? E' possibile dimostrare, cioè, che: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = h$, con $l \in R \cup \{-\infty; +\infty\}$ e $h \in R\ \ allora\ \ \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l + h$

B) **Il prodotto**.

Come per la somma: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = h$ allora esiste $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x))$ e $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = lh$?

1) Considera le due funzioni: f(x) $= \frac{1}{x^2}$ e g(x) $= x$. Si ha $\lim_{x \to 0} f(x) = \ldots.$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = \ldots$. Esiste $\lim_{x \to 0} (f(x)g(x))$?

2) Considera le due funzioni: f(x) $= \begin{cases} x + 1 & se\ x > 0 \\ -x - 1 & se\ x \leq 0 \end{cases}$ e g(x) $= \begin{cases} -x + 1 & se\ x > 0 \\ x - 1 & se\ x \leq 0 \end{cases}$. Riguardo i limiti $\lim_{x \to 0} f(x)$ e $\lim_{x \to 0} g(x)$ si ha che.....; mentre $\lim_{x \to 0} (f(x)g(x)) = \ldots$

Prova a fare altri esempi in cui: esistono i limiti dei fattori, ma non quello del prodotto e

viceversa, esiste il limite del prodotto, ma non quello dei fattori.

3) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = h \neq \pm\infty$, possiamo affermare che esiste $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x))$ e che $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = lh$? Riesci a dimostrarlo?

4) E’ necessario supporre che i limiti siano entrambi finiti? Dimostra che se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ è infinito e $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ allora $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x)$