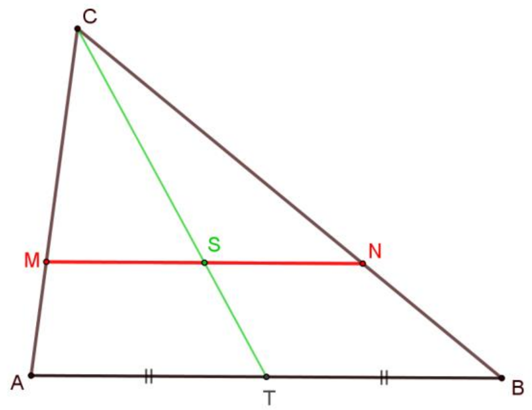
Soluzione - Problema 1)



Siano MN una corda parallela ad AB , CT la mediana relativa ad AB e S il punto d'intersezione di CT e MN.

Dalla similitudine dei triangoli CMS e CAT segue che $\frac{CS}{CT} = \frac{MS}{AT}$

Dalla similitudine dei triangoli $C\hat{S}N$ e CTB segue che $\frac{CS}{CT} = \frac{SN}{TB}$

Dall'uguaglianza dei primi membri delle precedenti relazioni segue che $\frac{MS}{AT} = \frac{SN}{TB}$ quindi

$$AT = TB \qquad \text{equivale a} \qquad MS = SN.$$

Ne risulta che la mediana CT è il luogo dei punti medi delle corde parallele ad AB.

b) Riferiamo, ora, il triangolo a un sistema d'assi ortogonale e siano per esempio

$$A(-1;0)\ , \qquad B(3;0), \qquad C(0;2)$$

Il punto medio di AB è $T(1;0)$ e la retta mediana CT ha equazione

$$y = -2x + 2.$$

Una retta $y = k$ parallela ad AB interseca , se $0 \leq k \leq 2$, i lati AC e BC nei punti M e N e il punto medio S del segmento MN ha coordinate

$$S\left(\frac{2-k}{2};k\right)$$

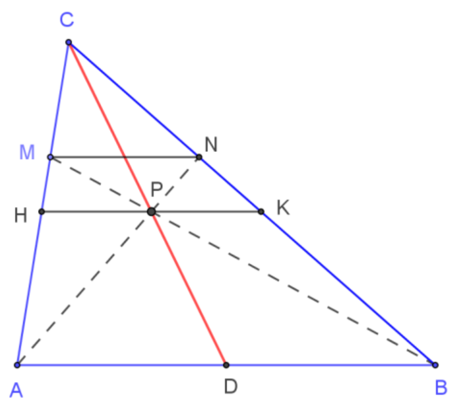
Il luogo ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{2-k}{2} \\ y = k \end{cases} \qquad 0 \le k \le 2$$

Eliminando k tra le due equazioni si ottiene l'equazione cartesiana del luogo $y = -2x + 2$, che, con la condizione $0 \le x \le 1$, rappresenta la mediana CT.

Soluzione – Problema 2)

a)



Conduciamo per P la corda HK parallela ad AB.

I triangoli APH e ANM sono simili pertanto possiamo scrivere :

$$\frac{PH}{MN} = \frac{AP}{AN}$$

i triangoli BPK e BMN sono simili pertanto possiamo scrivere :

$$\frac{PK}{MN} = \frac{BP}{BM}$$

Per il teorema di Talete

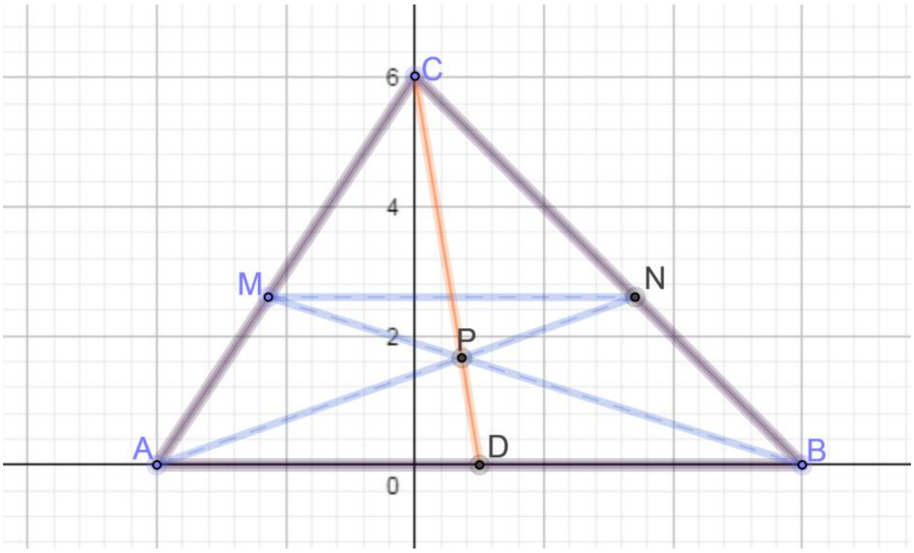
$$\frac{AP}{AN} = \frac{BP}{BM}$$

Quindi

$$\frac{PH}{MN} = \frac{PK}{MN} \qquad \text{da cui} \qquad PH=PK$$

Pertanto P è il punto medio della corda HK e quindi, vedi problema 1, il punto P appartiene alla mediana CD del triangolo ABC che risulta essere il luogo cercato.

b) nella risoluzione per via analitica si introduce un sistema di coordinate cartesiane,



se, per esempio A(-4;0) , B(6;0) , C(0;6) , il punto medio di AB è D(1;0) e la retta mediana AD ha equazione

$$y = -6x + 6.$$

Se $y = k$ è l'equazione della retta MN , si determinano le coordinate di M e N con $0 \leq k \leq 6$, si scrivono le equazioni delle rette MB e CN, la loro intersezione P ha coordinate $\left(\frac{12-2k}{12-k}; \frac{6k}{12-k}\right)$, $0 \leq k \leq 6$, quindi il luogo richiesto ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{12-2k}{12-k} \\ y = \frac{6k}{12-k} \end{cases} \qquad 0 \leq k \leq 6$$

da cui, eliminando k ,si ottiene l'equazione della mediana $y = -6x + 6$ con

$0 \leq x \leq 1$

c) con Geogebra si può verificare che la congiungente CP passa sempre per la metà di AB, quindi è la mediana relativa al lato AB, comunque si prenda M su AB e qualunque sia il triangolo ABC.