Triennio

Problema cortile

Un uomo entra in un cortile circolare di raggio $r = 8$ *da A e si sposta lungo il diametro AB con velocità costante* $v = 2\ m \cdot s^{-1}$. *Una lampada posta nell'estremo C del diametro CD perpendicolare ad AB proietta l'ombra dell'uomo sul muro nel punto Q. Supposto che all'istante* $t = 0$ *l'uomo si trovi in A, detta P la posizione dell'uomo all'istante* t *, si determinino:*

a) la funzione $s(t)$ *che rappresenta lo spazio percorso da Q nel tempo t e se ne tracci il grafico nel piano* $(t; s)$ *relativo all'intervallo di tempo in cui P percorre il diametro AB*

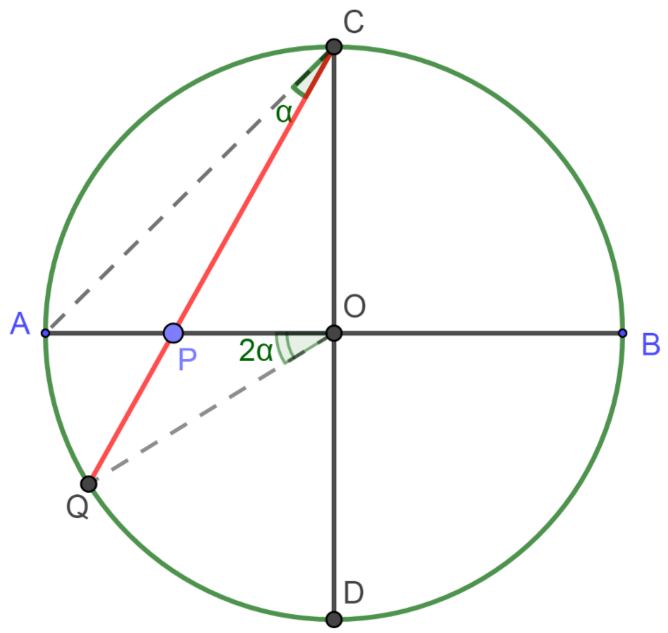
b) la velocità $v(t)$ *del punto Q e se ne tracci il grafico nel piano* $(t; v)$ *relativo all'intervallo di tempo in cui P percorre il diametro AB*

c) l'area descritta dalla congiungente CQ tra gli istanti $t = 2$ *e* $t = 4$

Il problema è legato alla realtà ed è collegato alla fisica, richiama concetti relativi a

- posizione e velocità di punti che si muovono su una traiettoria sia rettilinea che curvilinea
- studio di funzioni
- nozioni di trigonometria
- area di figure piane

Soluzione



$\overline{AB} = 16m$

Si ha $\overline{AP} = v \cdot t = 2t$ $\quad \overline{PO} = 8 \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ $\qquad 0 \leq t \leq 8$

$\overline{AP} = 8 - 8 \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ da cui

$$2t = 8 - 8 \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} - arctg\left(1 - \frac{t}{4}\right)$$

a) $arco(AQ) = s(t) = r \cdot 2\alpha = 4\pi - 16\, arctg\left(1 - \frac{t}{4}\right)$ $\qquad I = [0; 8]$

Funzione continua in I, risulta $s(0) = 0$, $s(8) = 8\pi$.

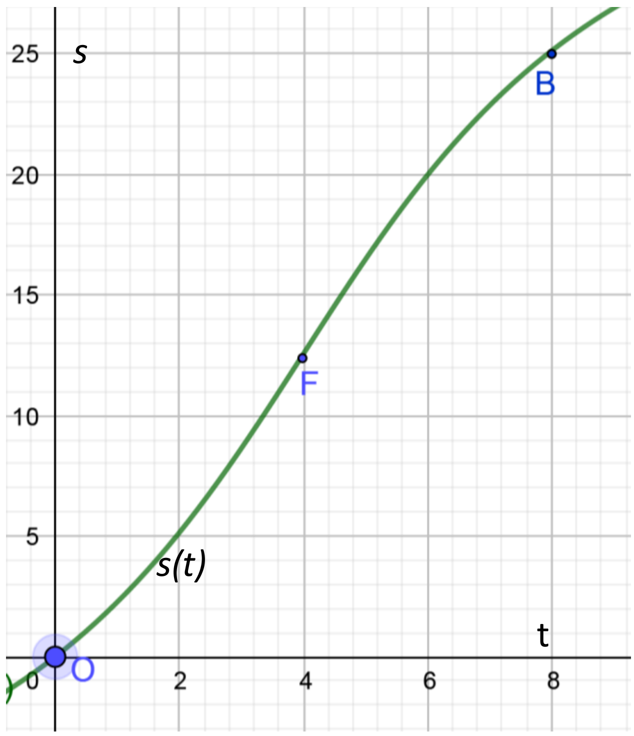
$s'(t) = \frac{64}{16+(4-t)^2}$ >0 $\forall t$ funzione crescente in I

$s''(t) = 128\frac{4-t}{(t^2-8t+32)^2}$

$$s''(t) \begin{cases} > 0 & 0 \leq t < 4 \\ = 0 & per\ t = 4 \\ < 0 & 4 < t \leq 8 \end{cases}$$

Flesso $(4; 4\pi)$

B(8;8π)



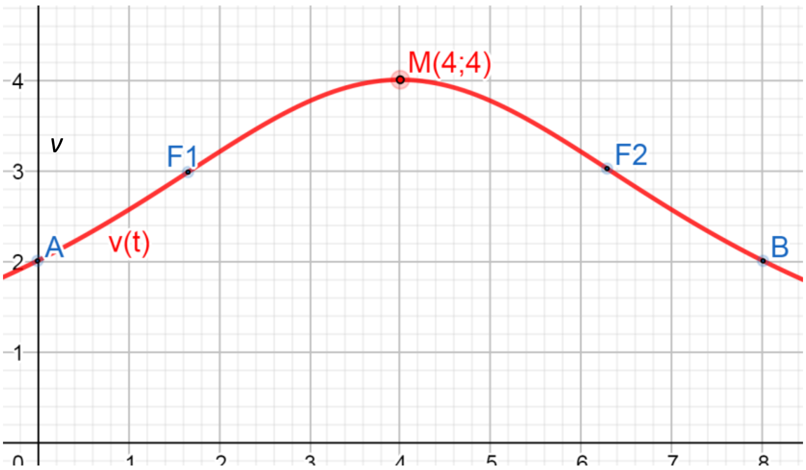
b) $v(t) = s'(t) = \frac{64}{16+(4-t)^2}$ $\qquad$ Funzione continua in I, risulta $v(0) = v(8) = 2$

$v'(t) = s''(t) = 128\frac{4-t}{(t^2-8t+32)^2} \begin{cases} > 0 & 0 \leq t < 4 \\ = 0 & per\ t = 4 \\ < 0 & 4 < t \leq 8 \end{cases}$ $\qquad$ massimo M (4;4)

$$v''(t) = 128\frac{3t^2-24t+32}{(t^2-8t+32)^2}\begin{cases} >0 & 0 \le t < 4-4\frac{\sqrt{3}}{3} \vee 4+4\frac{\sqrt{3}}{3} < t \le 8 \\ =0 & t = 4-4\frac{\sqrt{3}}{3} \vee t = 4+4\frac{\sqrt{3}}{3} \\ <0 & 4-4\frac{\sqrt{3}}{3} < t < 4+4\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Flessi per $t_{1,2}$= $4 \pm 4\frac{\sqrt{3}}{3}$

A(0;2) , B(8;2)



c) All'istante $t = 2$ il punto P si trova nel punto medio di AO e all'istante $t = 4$ è in O , il raggio CQ descrive un'area somma delle aree del triangolo OCQ e del settore QOD . Se $Q\hat{C}O = \beta$, si ha:

$tg\beta = \frac{1}{2}$ $\quad sin2\beta = \frac{2tg\beta}{1+tg^2\beta} = \frac{4}{5}$

area (OCQ)=$\frac{1}{2}\overline{OC}^2 \sin Q\hat{O}$C=$\frac{1}{2}8^2 \sin(\pi - 2\beta) = = 32\sin(2\beta)$ =$\frac{128}{5}$,

area settore (QOD) = $\frac{1}{2}\overline{OC}^2 \cdot 2\beta = \overline{OC}^2 arctg\frac{1}{2}$ ≈64· 0,46=29,44

Area totale = 55,04 m^2 .