Regole di deduzione
di Antonino Giambò

1. Fin dai tempi di Aristotele (IV sec. a.C.) sono considerati “ragionamenti corretti” quelle argomentazioni che, partendo da premesse vere, portano a conclusioni vere. Questo ci induce a formulare alcuni interrogativi:

a) Posto che le premesse siano vere, cosa garantisce che sia vera la conclusione dell’argomentazione?
b) Premesse vere portano comunque ad una conclusione vera?
c) Perché sono esclusi ragionamenti in cui le premesse non sono tutte vere?

Mi propongo in questo articolo di fornire una qualche risposta, che spero convincente, alle domande precedenti.

Si presuppone che siano note al lettore nozioni fondamentali di logica, come concetto di proposizione (o enunciato), tavole di verità di una proposizione composta e in particolare del condizionale, eccetera.

2. Incominciamo col dire che un *ragionamento*, più propriamente detto *ragionamento deduttivo*, è un’argomentazione in cui, partendo da una certa premessa I, detta *ipotesi* (eventualmente I può essere la congiunzione di più proposizioni o addirittura rimanere implicita), supposta vera, segue una conclusione T, detta *tesi*, che si vuole dimostrare essere vera.

Ciascuna delle deduzioni che compongono ogni ragionamento è basata su certe regole, dette **regole di deduzione** (o **di inferenza**).

Ci occupiamo di alcune di queste regole.

- Una regola di deduzione si ottiene allorché si consideri come ipotesi I la congiunzione delle seguenti proposizioni: $A\to B$ ed A, ovvero: $I=(A\to B)\wedge A$.

La tavola di verità del condizionale (tabella 1) mostra che, quando è vera I – nel qual caso sono vere entrambe le proposizioni $A\to B$ ed A – pure B è vera.

A	B	$A\to B$
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	V
F	F	V

tabella 1

Lo schema di deduzione, che evidenzia come la verità di B si deduca dalle premesse $A\to B$ ed A, può essere disposto nel modo seguente:

$$\begin{array}{c} A \to B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

È noto col nome di ***modus ponens*** (1). Ecco come si presenta nella seguente situazione particolare:

Se un triangolo ha due lati congruenti allora ha due angoli congruenti
Un dato triangolo ha due lati congruenti

Il triangolo ha due angoli congruenti

- In base alla regola del modus ponens, se sono vere le premesse (2) $\overline{B}\to\overline{A}$ e $\overline{B}$, è anche vera la conclusione $\overline{A}$. D’altra parte si sa che $\overline{B}\to\overline{A}\equiv A\to B$. Per cui se sono vere le premesse $A\to B$ e $\overline{B}$ possiamo concludere che è vera $\overline{A}$. La situazione, del resto, è ben evidenziata dalla tabella 2, la quale mostra che, quando $A\to B$ e $\overline{B}$ sono

[1] Letteralmente: *modo che afferma* (sottinteso: la verità di una proposizione).
[2] Si ricorda che $\overline{P}$ rappresenta la proposizione opposta della proposizione P; così come $\neg P$.

proposizioni vere, pure $\overline{A}$ è vera.

A	B	A→B	$\overline{B}$	$\overline{A}$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	**V**	**V**	**V**

tabella 2

Lo schema di deduzione che rappresenta questa situazione può essere disposto nel modo seguente, conosciuto come ***modus tollens*** [3] :

$$\begin{array}{c} A \to B \\ \overline{B} \\ \hline \overline{A} \end{array}$$

Per esempio:

Se un triangolo ha due lati congruenti allora ha due angoli congruenti Un dato triangolo non ha due angoli congruenti ———————————————————————— Il triangolo non ha due lati congruenti

- Altre regole di deduzione sono rappresentate dagli schemi seguenti:

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ \overline{A} \\ \hline B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A \wedge B) \\ A \\ \hline \neg B \end{array}$$

Idonee tavole di verità – che chi legge può costruire da sé assieme a qualche esempio chiarificatore – mostrano, per entrambi gli schemi, che quando le premesse sono vere è vera anche la conclusione.

Una breve chiosa. Siccome $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$, il secondo di questi ultimi due schemi è, in fondo, un modo diverso di rappresentare il primo.

3. Abbiamo dunque visto che, in un ragionamento corretto, a premesse vere corrisponde una conclusione vera. Sorge allora un interrogativo: a premesse vere corrisponde **sempre** una conclusione vera**?**

Si considerino, a titolo di esempio, i seguenti schemi:

$$\begin{array}{c} A \to B \\ B \\ \hline A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} A \vee B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

Ragioniamo sul primo di essi, mentre lascio a chi legge analoga operazione sul secondo schema.

La tavola di verità del condizionale (tabella 1) mostra che quando le premesse A→B e B sono vere si possono presentare due casi: nel primo (1ª riga) A è vera, nel secondo (3ª riga) A è falsa.

Un ragionamento basato su questo schema non è pertanto un ragionamento corretto.

I seguenti esempi servono a chiarire ulteriormente la situazione.

Se 8 è divisibile per 4 allora 8 è divisibile per 2 (vera) 8 è divisibile per 4 (vera) ———————————————————— 8 è divisibile per 2 (vera)

Se 12 è divisibile per 5 allora 12 è divisibile per 2 (vera) 12 è divisibile per 2 (vera) ———————————————————— 12 è divisibile per 5 (falsa)

[3] Letteralmente: *modo che toglie* (la verità di una proposizione).

Cosicché, la verità delle premesse non garantisce quella della conclusione. La garanzia bisogna trovarla altrove, per esempio come abbiamo fatto vedere sopra mediante idonee tavole di verità, ma anche in altri modi, come per esempio utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn. Mostrerò qualcosa in chiusura dell'articolo.

Una breve digressione.

Il matematico ungherese George Polya (1887-1985), in una sua celebre opera[4], non esclude del tutto il ragionamento basato sul 1° dei due schemi precedenti, pur non considerandolo un ragionamento corretto.

Egli, infatti, modifica quello schema, mettendolo nella forma seguente:

Se A vale, allora vale B
B è vero

A è più plausibile

E fornisce un esempio tutto sommato convincente, riferito all'avventura di Cristoforo Colombo nella scoperta dell'America:

Quando ci si avvicina a terra, spesso si vedono uccelli
Ora si vedono numerosi uccelli

Quindi diventa più plausibile la supposizione che ci si sta avvicinando a terra.

Il fatto che la proposizione A sia più plausibile non la rende ovviamente vera. Questo bisogna provarlo in altro modo. Darebbe comunque più fiducia, secondo Polya, a chi è impegnato nella ricerca di quella verità.

4. Abbiamo dunque visto che ragionamenti condotti partendo da premesse vere possono essere corretti (poiché portano a conclusioni vere) o non corretti (poiché non consentono di discriminare le conclusioni, che possono essere vere o false).

A questo punto sorge un secondo interrogativo: ci si può chiedere legittimamente, infatti, perché siano presi in considerazione soltanto ragionamenti con premesse vere e non siano presi invece in considerazione ragionamenti con premesse non tutte vere, cioè premesse tali che la loro congiunzione sia una proposizione falsa. Intuitivamente ci rendiamo conto che ragionamenti con premesse non tutte vere non siano convincenti. Qui ne vogliamo dare una spiegazione razionale.

Il fatto è che, se le premesse non sono tutte vere (se, dunque, la loro congiunzione è una proposizione falsa), ogni conclusione è possibile, vera o falsa.

Qualcosa del genere sembra che fosse già noto alla scuola Megarica (IV sec. a.C.) e certamente era già stato dimostrato nel corso del Medioevo. Recita, infatti, così una celebre proposizione: *ex falso sequitur quodlibet* (*dal falso segue qualsiasi cosa*). La proposizione è conosciuta come *teorema dello Pseudo-Scoto*. E asserisce, in sostanza, che "da una premessa falsa segue una qualsiasi conclusione", vera o falsa che sia.

Una tavola di verità (tabella 4), dove A è una proposizione vera e B è una qualsiasi proposizione, vera o falsa, la quale riproduce sostanzialmente la dimostrazione medievale, dimostra chiaramente che dalla proposizione falsa $(A \vee B) \wedge \bar{A}$ segue la proposizione B.

A	B	$A \vee B$	$\bar{A}$	$(A \vee B) \wedge \bar{A}$	$(A \vee B) \wedge \bar{A} \to B$
V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V

tabella 4

Ma il teorema dello Pseudo-Scoto può essere spiegato in altro modo, e anche più immediato. A tal riguardo riprendiamo lo schema "modus ponens", ma questa volta supponiamo che sia falsa una delle premesse – una sola[5] – A o $A \to B$. Cosicché la proposizione $A \wedge (A \to B)$ è falsa. Ebbene, le ultime tre righe della tabella del

[4] George Polya, *Come risolvere i problemi d matematica*, Milano, Feltrinelli, IV edizione, 1983, pag. 185 e segg.

[5] Per la struttura stessa del condizionale, le due premesse "A" e "$A \to B$" non possono essere contemporaneamente false dal momento che se A è falsa, $A \to B$ è certamente vera, qualunque sia il valore di verità di B.

condizionale (tabella 1), che sono quelle nelle quali una delle due proposizioni A e A→B è falsa, mostrano per l’appunto che B può essere vera (3^a riga) e può essere falsa (2^a e 4^a riga). Pertanto è dimostrato che dalla proposizione falsa $A \wedge (A \rightarrow B)$ segue la conclusione B, che può essere vera o falsa.

I seguenti esempi – relativi nell’ordine alle righe 3^a, 2^a, 4^a – chiariscono ulteriormente la situazione:

Se 7 è divisibile per 4 allora 7 è divisibile per 2 (vera)
7 è divisibile per 4 (falsa)
7 è divisibile per 2 (falsa)

Se 12 è divisibile per 5 allora 12 è divisibile per 2 (vera)
12 è divisibile per 5 (falsa)
12 è divisibile per 2 (vera)

Se 12 è divisibile per 6 allora 12 è divisibile per 5 (falsa)
12 è divisibile per 6 (vera)
12 è divisibile per 5 (falsa)

Insomma, un ragionamento basato su una premessa falsa è privo di ogni interesse dal momento che non garantisce il valore di verità della conclusione, la quale, per l’appunto, può essere vera e può essere falsa. Ed è per questa ragione che ragionamenti siffatti non sono presi in considerazione.

5. La validità o meno dei ragionamenti ai quali abbiamo fin qui accennato è stata spiegata col ricorso alle tavole di verità. Essa, tuttavia, può essere stabilita in altro modo. In particolare ricorrendo, quand’è possibile, ad opportuni diagrammi di Eulero-Venn. Per esempio, consideriamo il seguente ragionamento:

Se un quadrilatero è un rettangolo allora è un parallelogramma
Un dato quadrilatero è un parallelogramma
Il quadrilatero è un rettangolo

Evidentemente si tratta di un ragionamento non corretto poiché il quadrilatero dato, pur essendo un parallelogramma, non è necessariamente un rettangolo: può esserlo e può non esserlo.

La cosa può essere ben evidenziata da un idoneo diagramma di Eulero-Venn.

Ebbene, una volta costatato che la proposizione “Se un quadrilatero è un rettangolo allora è un parallelogramma” è equivalente alla proposizione “Tutti i rettangoli sono parallelogrammi”, un diagramma di Eulero-Venn (figura 1) mostra intanto che l’insieme R dei rettangoli è, per l’appunto, strettamente incluso nell’insieme P dei parallelogrammi.

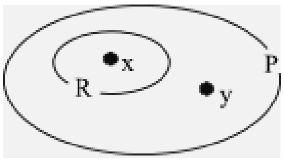

figura 1

Ora, il quadrilatero assegnato può essere effettivamente un rettangolo (è rappresentato dal pallino $x \in R$), ma può essere un parallelogramma generico (è rappresentato dal pallino $y \notin R$).

L’esempio è di per sé banale, ma chiarisce bene cosa intendo dire quando affermo che i diagrammi di Eulero-Venn possono, in determinate circostanze, essere idonei a dimostrare se un dato ragionamento è o no corretto.

6. Il ragionamento deduttivo che abbiamo descritto nelle righe precedenti è denominato **ragionamento**

diretto in quanto a partire dalla verità dell'ipotesi e procedendo per passi, magari mediante l'utilizzazione di altre proposizioni della cui verità siamo certi (sono dette a volte: ***ipotesi implicite***), si perviene alla verità della tesi. È con un ragionamento diretto che è dimostrata la maggior parte dei teoremi di matematica.

A volte, però, la dimostrazione di un teorema non può essere condotta mediante un ragionamento diretto o il ragionamento diretto è complicato. Insomma, ci sono difficoltà a desumere la verità della tesi procedendo direttamente dall'ipotesi. Si segue, allora, se possibile, un **ragionamento indiretto**.

La forma di ragionamento indiretto, alla quale, com'è noto, si ricorre spesso nelle dimostrazioni matematiche, è il **ragionamento per assurdo**.

Per quanto ne sappiamo, il primo esempio di un tale ragionamento figura in un'opera di Aristotele (*Analitici Primi*, I, 26-29), allorché egli dimostra l'incommensurabilità del lato con la diagonale di un quadrato.

Qui tento di spiegare come si articola in generale un ragionamento per assurdo e perché si tratta di un ragionamento corretto.

Per dimostrare dunque che dall'ipotesi I, assunta ovviamente come vera, segue la tesi T, si ammette che sia vera la negazione della tesi, cioè si ammette che sia vera la proposizione $\overline{\mathrm{T}}$. Sulla base di questa ammissione (e di eventuali altre ipotesi implicite) si sviluppa il ragionamento deduttivo fino a giungere alla conclusione che è vera la proposizione $\overline{\mathrm{I}}$, cioè alla negazione dell'ipotesi (a volte, alla negazione di una delle ipotesi implicite).

Ora, però, se c'è una cosa di cui siamo sicuri, questa è la verità dell'ipotesi I. Avere dimostrato, invece, che I è falsa significa che dovrebbe essere vera la congiunzione $\mathrm{I}\wedge\overline{\mathrm{I}}$. Ma questa proposizione è sicuramente falsa, perciò da qualche parte il ragionamento precedente fa acqua, è in difetto.

Esaminandolo, ci si rende conto che l'unico punto di crisi è costituito dall'avere ammesso la verità della proposizione $\overline{\mathrm{T}}$. Dobbiamo concludere che ciò non può essere, per cui $\overline{\mathrm{T}}$ è falsa e, di conseguenza, è vera T. Così ha termine il ragionamento per assurdo.

In altri termini e detto senza tanti giri di parole, invece di dimostrare la proposizione diretta $\mathrm{I}\rightarrow\mathrm{T}$ si dimostra la proposizione contronominale $\overline{\mathrm{T}}\rightarrow\overline{\mathrm{I}}$, ad essa equivalente.

Un esempio. Si vuole dimostrare che "una funzione reale di variabile reale non continua in un dato punto non è derivabile in quel punto". È possibile farlo con un ragionamento diretto, ma è più semplice ricorrere alla dimostrazione della proposizione contronominale che recita: "una funzione reale di variabile reale derivabile in un dato punto è continua in quel punto".

BIBLIOGRAFIA

[1] J. N. CROSSLEY e altri, *Che cos'è la logica matematica*? Torino, Boringhieri, 1979.

[2] A. GIAMBO' – R. GIAMBO', *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora, 2005.

[3] W. S. HATCHER, *Fondamenti della matematica*, Torino, Boringhieri, 1978.

[4] T. VARGA, *Fondamenti di logica per insegnanti*, Torino, Boringhieri, 1973.