Problema 2 - Soluzione

a) Sostituendo nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ le coordinate di A (1;0;0), M $(1;\frac{1}{2};1)$, G (0;1;1), si ottiene il sistema :

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ a + \dfrac{b}{2} + c + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $a = -d,\ b = -2d, c = d$, da cui $-dx - 2dy + dz + d = 0$, dividendo per $d \neq 0$, si ottiene l'equazione del piano AMG:

$$x + 2y - z - 1 = 0.$$

b) La distanza di B$(1;1;0)$ dal piano AMG è data da :

$$\overline{BT} = \frac{|1 + 2 - 1|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

c) La sfera di centro in B e raggio $\overline{BT}$ ha equazione

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{2}{3}$$

cioè

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 6y + 4 = 0$$

d) Il punto di tangenza T tra sfera e piano è il punto d'intersezione tra la perpendicolare per B al piano con il piano:

equazione della retta per B perpendicolare al piano AMG : $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t \end{cases}$

sostituendo nell'equazione del piano si ottiene:

$t + 1 + 2(2t + 1) + t - 1 = 0$ da cui $t = -\frac{1}{3}$

quindi T$\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

e) Possiamo calcolare il volume del tetraedro ABMG seguendo uno dei seguenti metodi

- si procede come nel problema 1

- si applica la formula del volume dato dal valore assoluto del numero :

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1-1 & 1-0 & 0-0 \\ 1-1 & \frac{1}{2}-0 & 1-0 \\ 0-1 & 1-0 & 1-0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}$$

Pertanto il tetraedro ha volume $V = \frac{1}{6}$.

Ricordiamo che il volume del tetraedro di vertici

$A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$, $C(c_1; c_2; c_3)$, $D(d_1; d_2; d_3)$

è il valore assoluto del numero

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix}$$