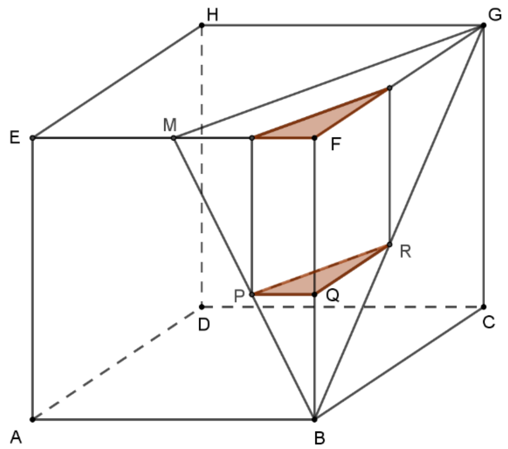
Problema 3 - Soluzione



Si ha : $\overline{FQ} = x$, con $0 \leq x \leq 1$,

$\overline{BQ} = 1 - x$

per la similitudine dei triangoli

BPQ e BMF risulta $\overline{PQ} = \frac{1}{2}(1 - x)$

essendo il triangolo BQR isoscele

risulta $\overline{QR} = \overline{QB} = 1 - x$

Il volume del prisma è

$V(x) = Area\ (PQR) \times \overline{FQ} = \frac{1}{4}x(1 - x)^2$, $0 \leq x \leq 1$

Per determinare il volume massimo si può procedere in due modi :

1) con i metodi dell'analisi :

la funzione, continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0; 1]$, per il teorema di Weierstrass è dotata di massimo; si calcolano gli zeri della derivata prima

$V'(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(3x - 1) \quad \Rightarrow \quad V'(x) = 0$ per $x = \frac{1}{3}$ e $x = 1$

Essendo

$V(0) = V(1) = 0$ e $V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$

si ha max $V(x) = V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$.

2) con i matodi per via elementare :

troviamo il massimo del prodotto $x(1 - x)^2$

poiché per $0 \leq x \leq 1$ risulta $x \geq 0$ e $1 - x \geq 0$ e i fattori x e $1 - x$ hanno somma costante, il prodotto $x(1 - x)^2$ è massimo se

$$\frac{x}{1} = \frac{1 - x}{2}$$

cioè per $x = \frac{1}{3}$.