Costruzioni con riga e compasso

di Antonino Giambò

1. Le costruzioni di figure geometriche utilizzando riga e compasso sono argomento di studio sia nei Licei (Indicazioni Nazionali) sia negli Istituti Tecnici e Professionali (Linee Guida).

La pretesa di servirsi di quei soli strumenti nelle ricerche geometriche risale all'antica Grecia. Quasi certamente il teorico di quella scelta fu il filosofo ateniese Platone (V-IV sec. a.C.), che rifiutava i mezzi meccanici nelle dimostrazioni geometriche privilegiando i soli strumenti riga e compasso per la semplicità e l'aspetto estetico delle figure che permettevano di tracciare. Oltretutto il compasso era indispensabile per il trasporto di un segmento, operazione fondamentale nelle costruzioni geometriche.

Chiariamo subito che la riga e il compasso di cui parla Platone sono strumenti ideali, essendo la prima una riga non graduata di qualunque lunghezza e il secondo un compasso di apertura ampia quanto si vuole. Ovviamente sul piano pratico ci si serve di strumenti reali.

Ora, utilizzando per l'appunto i soli strumenti riga (non graduata) e compasso, gli antichi risolsero molti problemi geometrici ed erano convinti di poterlo fare per tutti i problemi. Ma furono costretti ad arrestarsi di fronte ad ostacoli che si presentarono loro allorché provarono a generalizzarne alcuni.

In questo articolo mi soffermerò su quei problemi risolvibili con riga e compasso che portarono poi, nel tentativo appunto di generalizzarli, a problemi che però non si seppero risolvere con quei soli strumenti.

Alcuni di questi ultimi problemi – precisamente: *duplicazione del cubo, quadratura del cerchio, trisezione dell'angolo* – passarono alla storia come *problemi classici dell'antichità*.

Gli antichi, in realtà, riuscirono a risolvere i problemi classici, ma servendosi di strumenti "illegali". Per adesso non me ne occuperò se non per qualche cenno, ma se ne avrò occasione, conto di occuparmene in futuro, in un articolo apposito. Mi soffermerò invece sulle ragioni per le quali non furono in grado di risolverli con l'uso esclusivo dei mezzi "legali", vale a dire riga e compasso.

2. Sull'origine dei problemi che i geometri greci non seppero risolvere con l'uso esclusivo di riga e compasso ci sono a volte delle leggende, come quella relativa alla duplicazione del cubo (o problema di Delo): non me ne occuperò, convinto come sono che le ragioni vere nulla abbiano a che fare con la mitologia.

- Uno dei problemi risolubili con riga e compasso, che gli antichi provarono a generalizzare, figura negli *Elementi* di Euclide (libro I, proposizione 9). Nel nostro linguaggio:

Divisione di un angolo dato in due parti uguali (ovvero: *bisezione di un angolo*).

RISOLUZIONE (che ripete sinteticamente quella di Euclide, basata sulla prima proposizione dei suoi *Elementi*, vale a dire la costruzione di un triangolo equilatero. Ma se ne potrebbero descrivere altre).

È dato l'angolo di vertice V e lati a, b (figura 1). Si prendono sui lati a, b rispettivamente due punti A, B in modo che sia VA=VB. Sulla corda AB si costruisce il triangolo equilatero ABC. La semiretta di origine V, passante per C, divide l'angolo $a\widehat{V}b$ in due parti uguali. Ciò in base all'uguaglianza dei triangoli VAC e VBC.

Il problema si generalizza nel modo seguente:

Divisione di un angolo dato in n *parti uguali.*

Se n è una potenza di 2 ($n=2^k$), la divisione è possibile con i soli strumenti riga e compasso: basta utilizzare con ripetizione la bisezione di un angolo. Lo è anche per altri valori di n, ma se n=3 questa divisione (*trisezione di un angolo*) non si riuscì ad ottenerla. E questo non solo per n=3 ma anche per altri valori di n.

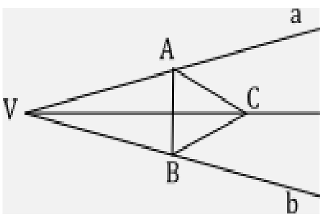

figura 1

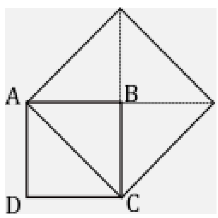

figura 2

- Un secondo problema che si risolve con l'uso esclusivo di riga e compasso è descritto con abbondanza di particolari da Platone in uno dei suoi dialoghi, il *Menone*:

Costruzione di un quadrato di area doppia di quella di un quadrato dato
(ovvero: *duplicazione di un quadrato*).

RISOLUZIONE.

Dato il quadrato ABCD (figura 2), il quadrato di lato AC, che si costruisce facilmente con l'uso dei soli strumenti riga e compasso, ha certamente area doppia di quella del quadrato dato. Cosa che si spiega rapidamente.

La generalizzazione allo spazio tridimensionale porta al seguente problema, che si rivelò irrisolvibile con i soli strumenti riga e compasso:

Costruzione di un cubo di volume doppio di un cubo dato (ovvero *duplicazione di un cubo*).

- Quello che per noi italiani [1] è il "teorema di Talete" in realtà non fu mai enunciato da Talete. Negli stessi *Elementi* di Euclide compare in una forma che non è esattamente quella che conosciamo al giorno d'oggi, anche se vi è molto vicina (VI, 10: *Dividere una retta data, ed indivisa, in parti proporzionali e similmente disposte rispetto a quelle di un'altra retta data, già divisa in parti*).

A dirla tutta, la denominazione "teorema di Talete" non compare ancora nemmeno nei testi di geometria della prima metà dell'Ottocento [2].

Ad ogni modo, i geometri greci avevano certamente cognizione di quel teorema, comunque lo chiamassero, e, applicandolo, furono in grado di risolvere il seguente problema, ovviamente con riga e compasso:

Divisione di un segmento dato in n *parti uguali*.

RISOLUZIONE.

Dato il segmento AB (figura 3), si conduce, con origine in A, una qualsiasi semiretta (non passante per B) e si staccano su di essa n segmenti uguali $AP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ (in figura n=5). Si congiunge P_n con B e, dai punti $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, si tracciano le parallele alla retta P_nB. Queste parallele intersecano il segmento AB nei punti $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$. In virtù del teorema di Talete, anche gli n segmenti $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ sono uguali.

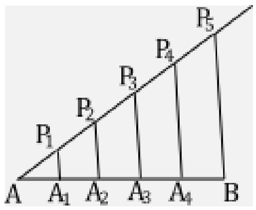

figura 3

La generalizzazione del problema alla circonferenza, vale a dire:

Divisione di una circonferenza in n parti uguali (o *problema della ciclotomia*)

trova soluzione con riga e compasso in molti casi (per esempio: n=3, 4, 5, 6) ma dovette arrestarsi per altri valori di n (per esempio: n=7, 9).

- I geometri antichi erano in grado di trasformare un qualsiasi poligono in un quadrato equivalente, ovviamente utilizzando i soli strumenti riga e compasso. L'operazione, denominata *quadratura* del poligono, si svolge in più fasi: 1) il poligono dato, una volta tracciate per un suo vertice le diverse diagonali, è scomposto in triangoli; 2) questi triangoli sono trasformati in triangoli equivalenti, aventi la medesima altezza; 3) la somma dei triangoli così ottenuti dà luogo ad un triangolo di uguale altezza la cui base è la somma delle basi

---

[1] La precisazione è d'obbligo giacché fuori dell'Italia e, in particolare, nei paesi anglosassoni il *teorema di Talete* è quello che recita: *Un angolo inscritto in una semicirconferenza è retto*. In quei paesi è denominato "teorema di proporzionalità di base" il seguente teorema: *Se in un triangolo si conduce una retta parallela ad uno dei lati, essa divide proporzionalmente gli altri due lati*. Lo attribuiscono a Talete, ma neanche questo teorema Talete ha mai enunciato. Esso è, in effetti, un caso particolare di quello che noi chiamiamo "teorema di Talete" e figura negli *Elementi* di Euclide (VI, 2).

[2] Uno di questi testi è: *Elementi di Algebra e Geometria* del Cav. Brunacci, parte II, Bologna, Giacomo Monti Editore, 1849. In questo testo figura ancora una proposizione, la N° 247, praticamente uguale alla proposizione VI, 10 di Euclide: «*Segare la data retta AB in F, H nell'istessa proporzione in cui sia divisa un'altra AC ne' punti D, E*», ma non è denominata "teorema di Talete".

dei triangoli; 4) il triangolo così costruito è trasformato in un rettangolo equivalente; 5) il rettangolo, infine, è trasformato in un quadrato equivalente.

Le prime 4 fasi dell'operazione sono sostanzialmente descritte da Euclide (*Elementi*, libro I, proposizioni 35-45)

La fase 4, in particolare, con qualche licenza da parte nostra, è descritta sinteticamente nella figura 4, dove il triangolo ABC è trasformato, dapprima nel parallelogramma equivalente MBCD, essendo M il punto medio di AB, e poi nel rettangolo equivalente MBEF.

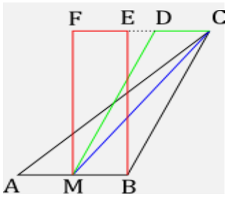

figura 4

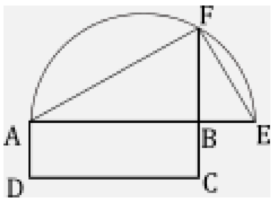

figura 5

L'ultima fase figura invece nel libro II, prop. 14. La descriviamo nel nostro linguaggio:

Costruzione di un quadrato equivalente ad un rettangolo dato.

RISOLUZIONE (che riassume nella sostanza quella di Euclide).

Dato il rettangolo ABCD (figura 5), si prolunga il lato AB di un segmento BE uguale a BC e, da parte opposta del rettangolo, si costruisce la semicirconferenza di diametro AE. La retta BC interseca questa semicirconferenza nel punto F. Qui Euclide fa tutto un ragionamento, basato su una precedente proposizione (II, 5), per giungere alla conclusione. Noi possiamo sostituire questo lungo ragionamento col ricorso a quello che in seguito sarebbe stato chiamato 2° teorema di Euclide [(3)] applicato al triangolo rettangolo FAE. In base al quale il quadrato costruito sul segmento BF è equivalente al rettangolo di lati AB e BE, vale a dire al rettangolo ABCD.

La generalizzazione al cerchio, ovverosia:

Costruzione di un quadrato equivalente ad un cerchio dato = Quadratura del cerchio

si rivelò un'operazione impossibile con i soli strumenti riga e compasso.

OSSERVAZIONE. Equivalente al problema della quadratura del cerchio è il *problema della rettificazione della circonferenza*, nel senso che, se si sa risolvere uno di essi, si sa risolvere anche l'altro.

Basta tener presente che il cerchio è equivalente ad un triangolo avente per base la circonferenza rettificata e per altezza il raggio del cerchio.

- La proposizione 1 del IV libro degli *Elementi* di Euclide è un esempio di *inserimento* di un dato segmento. Nel nostro linguaggio:

Inserimento all'interno di una circonferenza data di un segmento dato, non maggiore del diametro della circonferenza, in modo che i suoi estremi siano situati sulla circonferenza stessa.

RISOLUZIONE (che riassume nella sostanza quella di Euclide).

Si tratta essenzialmente di inscrivere nella circonferenza una corda lunga quanto un segmento dato.

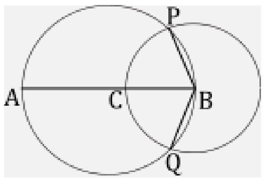

figura 6

Siano una circonferenza di diametro AB e un segmento XY non maggiore di AB (figura 6). Se fosse XY=AB la costruzione sarebbe conclusa. Supponiamo allora XY<AB. Si riporta il segmento XY sul segmento BC, parte

[3] Negli *Elementi* questo teorema non vi figura esplicitamente. Vi figurano però proposizioni equivalenti come la II, 14 o anche la VI, 13, ma soprattutto la VI, 8 che riassume, quantunque in modo implicito, il 1° e il 2° teorema di Euclide. Il 1° teorema, tuttavia, benché non esplicitamente enunciato, costituisce di fatto la prima parte della proposizione I, 47, come premessa alla dimostrazione del teorema di Pitagora, il cui enunciato coincide per l'appunto con la proposizione I, 47.

del diametro AB e, con centro in B, si descrive la circonferenza passante per C. Le due circonferenze si secano nei punti P e Q. Ognuna delle due corde BP e BQ risolve il problema.

La costruzione di un segmento dato in modo che i suoi estremi appartengano ad una linea data è possibile ottenerla con riga e compasso. Diverso è il discorso se, generalizzando il problema, si richiede che gli estremi del segmento debbano appartenere a linee diverse. In tal caso, ossia:

inserimento di un dato segmento fra due linee assegnate,

l'operazione non fu sempre possibile con i soli strumenti riga e compasso.

Se quest'operazione fosse stata sempre possibile, sarebbe stato pure possibile trisecare un angolo qualsiasi. Questo fatto è descritto da Archimede nel *Libro dei Lemmi*. Andiamo a vedere di che cosa si tratta.

È dato l'angolo convesso $a\hat{O}b$ (figura 7). Siano A e B le intersezioni di una qualunque circonferenza di centro O con i lati Oa ed Ob del triangolo. Si conduca quindi per B la retta c in modo che – detti C l'ulteriore punto in cui essa interseca la circonferenza e D il punto in cui interseca il prolungamento del lato Oa – il segmento CD sia lungo quanto il raggio della circonferenza. Si conduca infine per O la retta p parallela a c e si chiami P il punto, interno all'angolo $a\hat{O}b$, in cui essa interseca la circonferenza.

Si dimostra che l'angolo $A\hat{O}P$ è la terza parte dell'angolo $a\hat{O}b$.

Per questo si dimostra anzitutto che gli angoli $C\hat{O}D$ e $C\hat{D}O$ sono uguali e, così pure, sono uguali gli angoli $O\hat{C}B$, $O\hat{B}C$ e $P\hat{O}B$.

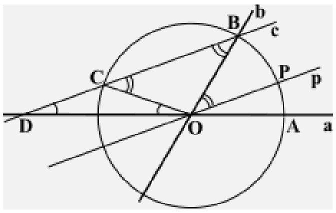

figura 7

Pertanto:

$O\hat{C}B=2\ C\hat{O}D$, o anche: $C\hat{O}D=\frac{1}{2}P\hat{O}B$ e $B\hat{O}C=180°–2\ O\hat{B}C=180°–2\ P\hat{O}B$.

D'altro canto: $A\hat{O}P+P\hat{O}B+B\hat{O}C+C\hat{O}D=180°$.

Per cui: $A\hat{O}P+P\hat{O}B+\left(180°–2\ P\hat{O}B\right)+\frac{1}{2}P\hat{O}B=180°$, e da qui, a conti fatti: $A\hat{O}P=\frac{1}{2}P\hat{O}B$.

Infine: $A\hat{O}P=\frac{1}{3}a\hat{O}b$. [c. v. d.]

La costruzione richiede che la retta c passante per B intercetti la circonferenza e la retta a in modo che **il segmento inserito fra queste due linee abbia una lunghezza assegnata** (quella del raggio della circonferenza, nel caso specifico).

E questo non è possibile ottenerlo con il solo uso di riga e compasso. Servirebbe almeno una riga graduata.

3. I geometri greci, non riuscendo a risolvere con mezzi "legali" quelli che abbiamo chiamato "problemi classici dell'antichità", cercarono di farlo servendosi di strumenti "illegali" come, per esempio, linee diverse da retta e circonferenza, tracciate sul piano o strumenti meccanici.

Qualche esempio:

- **Ippocrate** di Chio (attivo intorno al 430 a.C.), primo autore di *Elementi*, stabilì che la "duplicazione di un cubo" di spigolo 1 è equivalente all'inserimento di due medie geometriche, x ed y, tra i numeri 1 e 2. Infatti, dalla catena di proporzioni:

$$1 : x = x : y = y : 2$$

segue:

$$x^3 = 2,$$

che è per l'appunto l'equazione che risolve il problema.

- **Menecmo** di Proconneso (circa 375-325 a.C.) trovò che la costruzione di Ippocrate era equivalente alla determinazione del punto intersezione delle due parabole:

$$y = x^2 \text{ e } x = y^2/2.$$

- **Diocle**, geometra greco vissuto tra il III e il II sec. a.C., risolse il problema della duplicazione di un cubo servendosi di una curva particolare disegnata nel piano, la cosiddetta *cissoide*.
- Il problema della "trisezione di un angolo" trovò impegnato nella sua risoluzione **Ippia** di Elide (V sec. a.C. – fu filosofo sofista e insegnante a pagamento), il quale si servì per questo problema di una linea tracciata nel piano, detta ***trisettrice***.
- Un altro geometra greco, di nome **Nicomede** (III-II sec. a.C.), costruì una curva che chiamò ***concoide***, mediante la quale risolse il problema della "trisezione di un angolo".
- Il problema della "quadratura del cerchio" fu affrontato e risolto, intorno alla metà del IV secolo a.C., da **Dinostrato**, fratello di Menecmo, il quale si servì della trisettrice di Ippia, che per questo è anche denominata ***quadratrice***.

Bisogna dire che la ricerca di una risoluzione dei problemi classici con mezzi "illegali" continuò per secoli, fino all'età moderna e vide impegnati anche matematici illustri come, per esempio, Pascal e Cartesio.

4. In realtà, né i Greci né Pascal o Cartesio sapevano che era proprio impossibile la risoluzione con i soli strumenti riga e compasso dei problemi cui si è accennato sopra ed era per questo che non riuscivano a trovarla. Essi, in effetti, non disponevano dell'algebra necessaria per dimostrare questa impossibilità. Cosa che fu scoperta dai matematici solo nel secolo XIX, dopo che il francese Évariste Galois (1811-1832) e il norvegese Niels Henrik Abel (1802-1829) avevano avviato quella che oggigiorno è denominata *teoria dei campi*.

Il criterio per stabilire se un problema geometrico è risolubile o no con riga e compasso è il seguente:

Un problema geometrico è risolubile con riga e compasso se l'equazione che lo traduce algebricamente (ed i cui coefficienti appartengono al campo di razionalità *dei dati o al relativo* campo euclideo*) è risolubile per radicali quadratici. E viceversa.*

Ebbene, le equazioni che traducono i tre problemi classici non sono risolubili per radicali quadratici e pertanto non sono risolvibili con l'uso esclusivo di riga e compasso. Ci soffermiamo brevemente su questo fatto.

Ma prima, una precisazione a beneficio di quei due o tre lettori che non ne fossero a conoscenza.
- Dati alcuni parametri reali o complessi a, b, c, …, si definisce CAMPO DI RAZIONALITÀ determinato da essi l'insieme dei numeri che si ottengono operando su di essi con le quattro operazioni elementari.

Per esempio, il campo di razionalità determinato dal numero 1 altro non è che l'insieme dei numeri razionali.
- Se, oltre alle quattro operazioni elementari, si opera sui parametri dati con l'estrazione di radice quadrata, l'insieme che si ottiene si denomina CAMPO EUCLIDEO determinato da quei parametri.

- La duplicazione di un cubo di spigolo lungo 1 consiste chiaramente nella determinazione della lunghezza x dello spigolo del cubo di volume doppio, ossia 2. Questa lunghezza è pertanto data dalla soluzione dell'equazione $x^3=2$, che però non è risolubile per radicali quadratici. La duplicazione di un cubo non può essere ottenuta, perciò, con i soli strumenti riga e compasso.
- Per la trisezione di un angolo si prendono le mosse dalla seguente identità, la quale esprime la tangente di un qualsiasi angolo α in funzione dell'angolo $\alpha/3$:

$$\tan\alpha = \frac{3\tan\frac{\alpha}{3} - \tan^3\frac{\alpha}{3}}{1 - 3\tan^2\frac{\alpha}{3}}.$$

Ponendo $\tan\alpha = a$, quantità nota, e $\tan\frac{\alpha}{3} = x$, quantità incognita, dopo alcune semplici elaborazioni si ottiene l'equazione che risolve la questione di trisecare l'angolo α:

$$x^3 - 3\,a\,x^2 - 3\,x + a = 0\,.$$

A volte l'equazione è risolubile per radicali quadratici, ma più spesso non lo è. Quindi ci sono angoli che possono trisecarsi utilizzando i soli strumenti riga e compasso e ci sono angoli che non lo possono.

Alcuni esempi in cui la trisezione è possibile:
- Se $\alpha = 90°$, per cui $\tan\alpha = \infty$, l'equazione diventa: $3x^2 - 1 = 0$, ossia, prendendo la sola radice positiva e ricordando cos'è x:

$$\tan\frac{\alpha}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e perciò:} \quad \frac{\alpha}{3} = 30°.$$

- Se $\alpha = 180°$, per cui $\tan\alpha = 0$, l'equazione diventa: $x^3 - 3x^2 = 0$, ossia, prendendo la sola radice positiva e ricordando cos'è x:

$$\tan\frac{\alpha}{3} = \sqrt{3} \quad \text{e perciò:} \quad \frac{\alpha}{3} = 60°.$$

- Se $\alpha = 45°$, per cui $\tan\alpha = 1$, l'equazione diventa: $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$. Siccome:

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = (x+1)(x^2 - 4x + 1),$$

l'equazione è risolubile per radicali quadratici e perciò l'angolo è trisecabile con riga e compasso. In effetti, alla radice $x = 2 - \sqrt{3}$ dell'equazione, per cui $\tan\frac{\alpha}{3} = 2 - \sqrt{3}$, corrisponde l'angolo $\frac{\alpha}{3} = 15°$.

In effetti, sia la trisezione di un angolo piatto sia quella di un angolo retto è possibile ottenerle con riga e compasso. Basta utilizzare adeguatamente, per esempio, il triangolo equilatero. Per la trisezione dell'angolo di 45° basta osservare che l'angolo di 15° è la metà dell'angolo di 30°, che a sua volta è la metà di 60°.

È possibile dimostrare che gli angoli trisecabili con riga e compasso costituiscono un'infinità numerabile. Siccome però gli angoli sono un'infinità non numerabile, costituiscono un'infinità non numerabile pure gli angoli non trisecabili con riga e compasso (4).

- La quadratura di un cerchio di raggio 1 comporta la risoluzione dell'equazione $x=\pi$, avendo indicato con x proprio l'area del cerchio. E, chiaramente, questa equazione non è risolubile per radicali quadratici, essendo π un numero trascendente. Il problema perciò non è risolubile con i soli strumenti riga e compasso.

5. Un discorso a parte merita il problema della ciclotomia ovvero il problema della divisione della circonferenza in N parti uguali.

Questo problema, prescindendo dai casi banali N=1 e N=2, equivale a trovare i vertici di un poligono regolare di N lati inscritto nella circonferenza. E questi vertici – supposto che la circonferenza abbia raggio 1 e centro nell'origine O di un piano identificato con il piano di Gauss-Argand-Wessel – sono dati dalle radici, in campo complesso, dell'equazione seguente, detta per questo *equazione della ciclotomia*:

$$z^N - 1 = 0 \,.$$

Detto per inciso, tali radici altro non sono che le N radici N-esime dell'unità.

A titolo di esempio, posto che sia N=3, si costata anzitutto che $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$, per cui le sue radici sono i seguenti numeri complessi (radici cubiche dell'unità):

$$1, \quad -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2},$$

ovvero le seguenti coppie ordinate:

$$(1{,}0), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ebbene, queste coppie sono esattamente le coordinate dei vertici A_0, A_1, A_2 del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine O del piano di Gauss (figura 8).

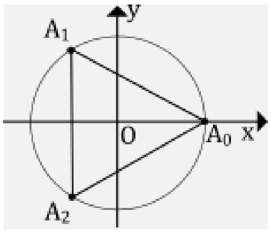

figura 8

Si tratta pertanto di stabilire quando l'equazione della ciclotomia è risolvibile per radicali quadratici.

Ebbene, il grande Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dimostrò al riguardo un teorema che figura nell'opera *Disquisitiones arithmeticae*, pubblicata nel 1801, quando egli aveva 24 anni, ma che sembra avesse scoperto molto prima, quando di anni ne aveva solo 19. Questo è il teorema:

Una circonferenza può essere suddivisa in N *parti uguali con i soli strumenti riga e compasso se vale la seguente condizione (*che, per comodità, chiamiamo *condizione di Gauss):*

N *è un numero avente la forma seguente:*

$$N = 2^m\, p_1\, p_2\, \ldots\, p_h\,,$$

dove m *è un numero naturale mentre* $p_1\, p_2\, \ldots\, p_h$ *o sono uguali ad* 1 *o sono numeri primi di Fermat, cioè numeri primi del tipo* $2^{2^k}+1$*, diversi fra loro.*

---

[4] L'enunciato e la dimostrazione di questi fatti sono opera del matematico italiano Carlo Rosati, 1876-1929.

È appena il caso di ricordare che di numeri primi di Fermat se ne conoscono attualmente solo 5, quelli che si ottengono ponendo 0, 1, 2, 3, 4 al posto di k nell'espressione $2^{2^k}+1$, vale a dire i numeri 3, 5, 17, 257, 65.537. Non si sa se ne esistano altri.

Ora, la divisione della circonferenza in 3 o in 5 parti uguali, vale a dire la costruzione (con riga e compasso) di un triangolo equilatero o di un pentagono regolari inscritti in una circonferenza, era ben conosciuta dai geometri greci. Così com'era conosciuta quella di un quadrato $(N=2^2)$, di un esagono regolare $(N=2\times3)$, di un decagono regolare $(N=2\times5)$, di un dodecagono regolare $(N=2^2\times3)$, di un pentadecagono regolare $(N=3\times5)$ e di altri poligoni regolari inscritti in un cerchio. Euclide ne tratta in parte nel IV libro degli *Elementi*.

Gauss dimostrò dunque che anche la divisione della circonferenza in 17 parti uguali, vale a dire la costruzione di un poligono regolare di 17 lati (*eptadecagono regolare*) inscritto in essa, è possibile ottenerla con riga e compasso. La costruzione effettiva, tuttavia, non fu eseguita da lui, bensì nel 1825 da uno studioso tedesco di nome Johannes Erchinger, del quale francamente non sono riuscito a sapere nient'altro. Gauss, comunque, aveva fornito una costruzione, diciamo trigonometrica, dell'eptadecagono regolare.

Proprio con riguardo a questo poligono, si racconta che Gauss abbia lasciato scritto che esso fosse inciso sulla sua tomba. Non fu possibile accontentarlo poiché non si trovò uno scalpellino capace di eseguire l'opera, dal momento che il poligono si confondeva con la circonferenza ad esso circoscritta (figura 9)

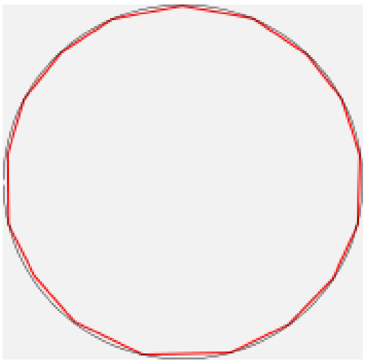
figura 9


figura 10

È curioso che in Spagna, a Siviglia, spicchi, al centro de la Plaza de la Magdalena, una fontana avente una base a forma di un eptadecagono regolare (figura 10), costruita nel 1844, vale a dire 11 anni prima della morte di Gauss.

La divisione della circonferenza in 257 parti uguali coi soli strumenti riga e compasso, che è possibile in base al teorema di Gauss, fu oggetto della tesi di laurea del matematico tedesco Friedrich Julius Richelot (1808-1875), allievo del grande Jacobi (1804-1851), e successivamente anch'egli, come il suo maestro, professore nell'Università di Könisberg[5]. La tesi, discussa nell'anno 1831, fu pubblicata nel 1832 su quella che, allora come anche oggi, è ritenuta una delle più importanti riviste di matematica, il celebre Crelle's Journal.

La condizione enunciata e dimostrata da Gauss sulla ciclotomia è una condizione sufficiente, nel senso che se è soddisfatta allora la circonferenza può essere suddivisa in N parti uguali.

Gauss affermò che essa è anche necessaria, ma senza dimostrarlo.

La dimostrazione fu invece compiuta dal francese Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) nel 1837 mentre era ancora studente di ingegneria.

Questa condizione assicura che:

---

[5] A quell'epoca Könisberg (*montagna del re*) era una città prussiana, poi fu città tedesca, ma nel 1945 fu annessa all'allora URSS e ribattezzata Kalinigrad l'anno successivo. Oggi è una citta russa. È famosa per il problema dei sette ponti (Eulero, 1736), ma anche perché ha dato i natali a molti personaggi illustri, compreso lo stesso Richelot. Alcuni fra i nomi più conosciuti: Johannes Müller (1436-1476), detto Regiomontano, matematico e astronomo; Christian Goldbach (1690-1764), matematico; Immanuel Kant (1724-1804), filosofo; Gustav R. G. Kirchhoff (1824-1887), fisico e matematico; Rudolph Koenig (1832-1901), fisico; Rudolph O. S. Lipschitz (1832-1903), matematico; David Hilbert (1862-1943), matematico; Arnold Sommerfeld (1868-1951), fisico.

Se è possibile ottenere la divisone in N parti uguali di una circonferenza
con i soli strumenti riga e compasso allora vale la condizione di Gauss,

ovvero, considerando la contronominale di questa proposizione:

Se non è soddisfatta la condizione di Gauss la divisione suddetta non è possibile.

La proposizione enunciata e dimostrata da Gauss, completata da Wantzel con la dimostrazione della proposizione inversa, è dunque una condizione necessaria e sufficiente: va sotto il nome di *teorema di Gauss-Wantzel*.

Questo teorema assicura, in definitiva, che tutti e soli i poligoni regolari che si possono costruire con l'uso esclusivo di riga e compasso sono quelli che soddisfano alla condizione di Gauss.

Oppure, detto in altri termini: tutte e sole le N parti in cui può essere divisa una circonferenza con l'uso esclusivo di riga e compasso sono quelle per le quali N soddisfa alla condizione di Gauss.

Da tutto ciò discende che, prendendo in esame, per esempio, i poligoni regolari con un numero di lati non superiore a 50:

- risultano costruibili con i soli strumenti riga e compasso i poligoni i cui lati sono in numero di:
  3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48;
- non risultano invece costruibili con i soli strumenti suddetti i poligoni i cui lati sono in numero di:
  7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31,
  33, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50.

Una curiosità per concludere.

Alcuni testi di geometria forniscono costruzioni con riga e compasso dei poligoni regolari di 7 lati (*ettagono regolare*) o di 9 lati (*ennagono regolare*), vale a dire di poligoni che non possono essere costruiti con l'uso esclusivo di riga e compasso, in base al teorema di Gauss-Wantzel.

In effetti, il numero 7 non si può mettere nella forma di Gauss, mentre il numero 9 è sì prodotto di due numeri primi di Fermat, $9=3\times3$, che però non sono diversi tra loro, come invece dovrebbe essere in base al teorema.

Si tratta, in realtà, di costruzioni approssimate o costruzioni ottenute con mezzi "illegali", che però spesso non sono dichiarate tali, come onestà intellettuale richiederebbe.

BIBLIOGRAFIA.

[1] ERIC T. BELL, *I grandi matematici*, Firenze, Sansoni, 1966.

[2] CARL B. BOYER, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1980.

[3] RICHARD COURANT – HERBERT ROBBINS, *Che cos'è la matematica*? Firenze, Boringhieri, 2000.

[4] EUCLIDE, *Gli Elementi* (a cura di A. Frajese e L. Maccioni), Torino, UTET, 1970.

[5] ATTILIO FRAJESE, *Attraverso la storia della matematica*, Firenze, Le Monnier, 1971.

[6] WIKIPEDIA, libera enciclopedia on-line.