

della Geometria: *Quasi tre triangoli scaleni sono: una figura (ὄχημα), un numero (ἀριθμός), e una grandezza (μοῶτης) e la loro misura si trova come è stato indicato.*

Qui è chiaramente fatta la distinzione fra la *figura* e la *grandezza*, distinzione che non è fatta esplicitamente in EUCLIDE; di più si parla del numero, sembrerebbe nel senso pitagorico e platonico, infine viene esplicitamente considerata la *misura*. Cioè, se non m'inganna prescindendo dal punto di vista pitagorico, sono qui assai bene caratterizzati i vari aspetti della questione, ai quali accennavo in principio: nelle nasce il rimpianto per l'arresto subito dallo sviluppo della matematica, quando nuovi campi di ricerca e di critica già si delineavano allo spirito degli studiosi, arresto al quale devono certamente collegarsi, se non come fra le cause più importanti, almeno come sintomo, le infiltrazioni neo-pitagoriche, che purtroppo hanno spesso carattere extra-scientifico, anzi, anti-scientifico ⁽¹⁾.

EMILIO ARTOM

Sopra la teoria cinetica dei corpi solidi ⁽²⁾

Il carattere che distingue, dal punto di vista cinetico, un corpo solido da un fluido, consiste essenzialmente nel fatto, che mentre gli atomi di quest'ultimo nel loro moto termico possono allontanarsi assai considerevolmente dalla posizione da essi inizialmente occupata, quelli del primo oscillano invece continuamente attorno a una posizione di equilibrio. La ragione di questo diverso comportamento si deve naturalmente ricercare nel differente rapporto che esiste nei due casi tra l'energia cinetica del moto termico degli atomi, e l'energia delle forze che tendono a mantenerli nelle loro posizioni di equilibrio.

⁽¹⁾ *Lozia*, op. cit., pag. 795 e 819, 820.

⁽²⁾ Estratto di una conferenza tenuta davanti al Seminario Matematico della Università di Roma, il 18 aprile 1925.

I problemi fondamentali della teoria cinetica dei corpi solidi si possono ridurre sostanzialmente a due. Il primo si propone la determinazione del moto termico degli atomi, ammettendo provvisoriamente che le forze che agiscono tra di essi siano quasi elastiche, mentre il secondo ha invece per oggetto la determinazione della natura effettiva di queste forze.

Noi ci occuperemo anzitutto del primo problema, e la questione che tratteremo più particolarmente sarà quella della determinazione dell'energia dei moti termici, e quindi anche dei calori specifici, in funzione della temperatura. Questo problema, che anche storicamente fu il primo ad essere trattato, è particolarmente adatto a mostrare i successivi stadi dello sviluppo della teoria di cui ci stiamo occupando, e a far vedere come essa dovette successivamente perfezionarsi per rendere conto dei nuovi fatti sperimentali che venivano man mano scoperti.

I calori specifici dei corpi solidi variano con la temperatura. Vi è però un intervallo di temperature, che comprende, per la maggior parte degli elementi solidi, anche la temperatura ordinaria, nel quale il calore specifico si mantiene abbastanza approssimativamente costante. Ora le prime misure furono naturalmente eseguite in questo intervallo e portarono alla scoperta della legge di Dulong e Petit, che afferma, come è noto, che il calore specifico degli elementi solidi è inversamente proporzionale al loro peso atomico, o, che è lo stesso, che se invece che all'unità di massa ci si riferisce al grammo atomo, il calore specifico risulta eguale per tutti gli elementi.

Questa legge che, quando si effettuino le misure a temperatura ordinaria, presenta solo pochissime eccezioni, trovò una facile interpretazione teorica. Consideriamo infatti N atomi di un corpo che, in prima approssimazione, riguarderemo come punti materiali; essi avranno complessivamente $3N$ gradi di libertà. Conformemente ai principi della meccanica statistica classica ad ogni grado di libertà corrisponde l'energia cinetica media $kT/2$, essendo T la temperatura assoluta e k la costante di Boltzmann; l'energia cinetica dei nostri N atomi sarà dunque $3NkT/2$. Siccome poi le forze che agiscono tra di essi sono in prima approssimazione delle

forze elastiche, si ha che in media l'energia cinetica è uguale a quella potenziale.

L'energia termica totale del nostro corpo sarà dunque

$$(1) \quad W = 3NE T$$

Dall'espressione dell'energia risulta immediatamente quella del calore specifico, che è dato da

$$c = \frac{dW}{dT} = 3Nk.$$

Secondo questa teoria esso risulta dunque eguale per tutti gli elementi e indipendente dalla temperatura; anche numericamente il suo valore coincide bene con la costante della legge di Dulong e Petit.

Esperienze successive dimostrarono però che la legge di Dulong e Petit perde completamente la sua validità per temperature molto basse, poichè a tali temperature il calore specifico cessa di essere costante, e diminuisce tendendo a zero quando la temperatura si avvicina allo zero assoluto.

Il primo a dare una interpretazione teorica di questo risultato fu EINSTEIN. Egli osservò che essendo gli atomi di un corpo legati tra di loro da forze quasi elastiche, essi sono equiparabili a oscillatori, e, come prima approssimazione, li considerò equivalenti complessivamente a $3N$ oscillatori, tutti della stessa frequenza ν . Secondo la teoria dei quanti la legge della equipartizione dell'energia perde la sua validità per oscillatori di frequenza abbastanza elevata, e l'espressione dell'energia media di un oscillatore invece di essere, come secondo la meccanica statistica classica, kT , ha invece il valore

$$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

L'energia media dei $3N$ oscillatori equivalenti al nostro corpo solido sarà dunque

$$(2) \quad W = \frac{3Nk\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Questa formula, e quella che da essa può dedursi per il calore specifico, si mostrarono in abbastanza buon accordo con l'esperienza, specialmente per temperature non estremamente basse; i valori di v calcolati dall'andamento dei calori specifici corrispondono anche abbastanza bene con le frequenze dei così detti Reststrahlen, che sono radiazioni luminose, situate nell'infrarosso estremo, le quali derivano appunto dalle vibrazioni degli atomi del corpo.

Per temperature molto vicine allo zero assoluto tuttavia, anche la teoria di EINSTEIN si dimostrò insufficiente; mentre infatti in realtà per temperature molto basse il calore specifico dei corpi solidi tende a zero come T^3 , secondo la teoria di EINSTEIN invece esso dovrebbe annullarsi assai più rapidamente.

Per correggere questa ultima divergenza occorre modificare una ipotesi troppo semplicista della teoria di EINSTEIN. In questa teoria si parte infatti dall'ipotesi che tutte le frequenze caratteristiche del corpo solido siano tra di loro eguali; il sistema elastico costituito da tutti gli atomi del corpo sarà invece in realtà capace di vibrare secondo frequenze assai numerose; nel calcolo dell'energia termica del corpo solido bisogna quindi tener conto separatamente di tutte queste frequenze caratteristiche.

Un primo metodo per il calcolo di tali frequenze fu escogitato da DENYB, e benchè esso debba far uso di una ipotesi a prima vista alquanto insoddisfacente, diede tuttavia risultati assai buoni; successivamente il metodo di DENYB fu perfezionato e completato per opera di BOHR e KAHMAN i quali ebbero anche modo di giustificare le ipotesi fatte da DENYB. Il principio del metodo usato da DENYB è il seguente: Si fa in esso anzitutto astrazione, in una prima approssimazione, dalla struttura discontinua del corpo solido, che viene considerato come un mezzo elastico omogeneo e continuo. Se ora si considera un pezzo di questo corpo, esso sarà capace di vibrare con certe frequenze caratteristiche dipendenti dalla sua forma, dalle sue dimensioni e dalle sue proprietà elastiche, allo stesso modo che una corda tesa può vibrare con frequenze che dipendono dalla sua lunghezza e dalla sua tensione. Naturalmente, per il problema che ci interessa, non è necessaria la determinazione dettagliata di tutte queste

frequenze, ma basta conoscerne la distribuzione, avere cioè una espressione asintotica per il numero delle frequenze caratteristiche che cadono in un assegnato intervallo di frequenze.

Ora si trova che il numero delle frequenze proprie comprese tra ν e $\nu + d\nu$ è dato, per un sistema di vibrazioni che si propagano con velocità v in un corpo di volume V ,

da $\frac{4\pi V}{v^3} \nu^2 d\nu$. Siccome poi nel caso dell'elasticità si hanno

tre sistemi di propagazioni, due trasversali con velocità v_1 , e uno longitudinale con velocità v_2 , possiamo concludere che il numero delle frequenze proprie comprese tra ν e $\nu + d\nu$ è

dato da $4\pi V \left(\frac{2}{v_1^3} + \frac{1}{v_2^3} \right) \nu^2 d\nu$. Attribuendo a ciascuna di queste

frequenze l'energia media $h\nu \left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)$, troviamo come espressione dell'energia termica di tutto il nostro corpo solido

$$(3) \quad W = 4\pi V \left(\frac{2}{v_1^3} + \frac{1}{v_2^3} \right) \int_0^\infty \frac{h\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Se la schematizzazione da noi fatta nel considerare il nostro corpo come un corpo elastico continuo, fosse in realtà esatta, l'integrale precedente dovrebbe evidentemente venir esteso tra zero e infinito, poichè sarebbe possibile la propagazione di vibrazioni elastiche di frequenza comunque grande.

È evidente invece che nel nostro caso ciò non può avvenire, poichè mentre il corpo continuo è capace di vibrare con infinite frequenze caratteristiche, il corpo reale discontinuo ha invece soltanto $3N$ gradi di libertà. Di fronte a questa difficoltà DERNY usò un artificio, che benchè in linea di principio assai insoddisfacente, portò tuttavia a brillanti risultati, e fu del resto, almeno in parte, giustificato in seguito dalla teoria più perfezionata di BORN e KARMAN. DERNY ammise che in un corpo elastico reale non potessero propagarsi vibrazioni di frequenza superiore a un certo limite ν_{\max} , e calcolò questo limite in modo che il numero totale delle frequenze caratteristiche inferiori ad esso, e cioè

$$4\pi V \left(\frac{2}{v_1^3} + \frac{1}{v_2^3} \right) \int_0^{\nu_{\max}} \nu^2 d\nu$$

risultasse eguale a $3N$, ossia al numero dei gradi di libertà del corpo.

Con questa ipotesi il limite superiore dell'integrale (3) diventa v_{\max} e otteniamo una espressione per l'energia termica, e quindi anche per il calore specifico, in ottimo accordo con l'esperienza. Osserviamo anche che l'accordo tra questa teoria e l'esperienza è tanto più significativo, in quanto la formula di DENYX contiene quali unici parametri le costanti elastiche del corpo, le quali possono venir determinate con misure elastiche dirette, indipendenti completamente dalle misure del calore specifico.

Un perfezionamento ulteriore alla teoria dei calori specifici fu, come già abbiamo accennato, apportato da BORN e KÄRMAN. Partendo dallo stesso concetto di DENYX, e cioè di calcolare l'energia termica del corpo solido come somma delle energie di tanti oscillatori, di frequenze eguali alle frequenze caratteristiche del corpo, essi applicarono un metodo assai più corretto per il calcolo di queste frequenze, poiché considerarono il corpo quale esso è in realtà, e cioè costituito da un reticolato di atomi. Senza entrare nei dettagli del calcolo di un sistema elastico costituito da un reticolato di masse esercitanti tra di loro delle forze proporzionali agli spostamenti relativi, vogliamo far vedere sopra un esempio schematico, l'influenza che ha la struttura discontinua del corpo sopra la propagazione delle onde elastiche.

Studieremo per questo la propagazione di una perturbazione elastica in una fila di punti di massa eguale, spazati tra di loro di un intervallo costante a . Supporremo che sopra ciascun atomo agiscano soltanto i due che gli sono più vicini, e che la forza che si esercita tra due atomi attigui sia proporzionale al loro spostamento relativo. Supponiamo dunque che lungo la nostra fila si propaghi una onda elastica sinusoidale, di frequenza ν e di velocità v . Lo spostamento di una particella si potrà scrivere.

$$\xi = A \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{v} \right)$$

dove con x si rappresenta la ascissa della particella, che è data da na , essendo n un numero intero. Ci proponiamo di

trovare la relazione che passa tra v e σ ; faremo vedere precisamente che, a differenza di quello che accadrebbe in una sbarra elastica a struttura continua, la velocità di propagazione non è costante, ma dipende dalla frequenza.

Lo spostamento della particella per cui $n=1$, è dato da $A \sin 2\pi v \left(t - \frac{a}{v} \right)$ e quello della particella $n=0$ è dato invece da $A \sin 2\pi v t$. La forza agente tra queste due particelle, che per ipotesi è proporzionale al loro spostamento relativo, potrà dunque scriversi

$$kA \left\{ \sin 2\pi v \left(t - \frac{a}{v} \right) - \sin 2\pi v t \right\}$$

essendo k il coefficiente di proporzionalità. Sulla particella $n=0$, agirà anche una altra forza, dovuta all'azione della particella per cui $n=-1$. Tale forza sarà espressa analogamente da $kA \left\{ \sin 2\pi v \left(t + \frac{a}{v} \right) - \sin 2\pi v t \right\}$.

Scrivendo che il prodotto della massa m della particella per cui $n=0$, per la sua accelerazione $-4\pi^2 v^3 A \sin 2\pi v t$ è uguale alla somma delle forze che agiscono su di essa, troviamo.

$$\begin{aligned} -4\pi^2 v^3 m A \sin 2\pi v t &= \\ &= kA \left\{ \sin 2\pi v \left(t - \frac{a}{v} \right) + \sin 2\pi v \left(t + \frac{a}{v} \right) - 2 \sin 2\pi v t \right\} = \\ &= -2kA \sin 2\pi v t \left\{ 1 - \cos \frac{2\pi v a}{v} \right\} = -4kA \sin 2\pi v t \sin^2 \frac{\pi v a}{v} \end{aligned}$$

da questa equazione si ricava, con immediate riduzioni

$$(4) \quad v = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\pi v a}{v}.$$

Questa è appunto la relazione cercata tra la velocità di propagazione e la frequenza. Il caso della propagazione in un mezzo continuo, si può ottenere da quello studiato come caso limite per $a=0$. In questo caso, sostituendo l'arco al seno si vede che v viene a sparire dalla formula precedente, e quindi la velocità di propagazione v risulta indipendente dalla

frequenza, come appunto deve essere in mezzi a struttura continua.

Osserviamo ancora che siccome il seno non può mai essere maggiore di 1 si ricava dalla (4)

$$v \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ciò che ci dice che non può avvenire nella nostra fila di particelle una propagazione di onde elastiche di frequenza maggiore di $\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$. Questo fatto giustifica in un certo senso l'introduzione, fatta arbitrariamente da DEBYE, della frequenza limite.

Passiamo ora ad accennare come possano essere interpretati, dal punto di vista della teoria di cui abbiamo indicate le basi, alcuni dei principali fenomeni della fisica dei corpi solidi.

Se le forze che agiscono tra gli atomi del corpo, fossero rigorosamente elastiche, la posizione media occupata da ciascun atomo non dovrebbe spostarsi per effetto del moto termico. In realtà però le forze interatomiche sono soltanto approssimativamente elastiche. La conseguenza di questo è che l'atomo in movimento si sposta anche in media dalla posizione che occuperebbe se fosse fermo, per modo che per effetto del moto termico viene a variare la distanza media tra gli atomi. Questo dà luogo alla dilatazione termica. Per vedere schematicamente come ciò accada, consideriamo un unico punto, attratto da una forza quasi elastica verso una posizione di equilibrio. Supporremo per semplicità il nostro punto mobile sopra una retta, e sia $x=0$ l'ascissa della posizione di equilibrio. Prendiamo come espressione dell'energia potenziale della forza quasi elastica, $U = kx^2 + hx^3$; se mancasse il termine cubico la forza sarebbe esattamente elastica, e noi supporremo perciò che il termine cubico sia assai piccolo in confronto di quello quadratico. La forza agente sopra la nostra particella avrà per espressione $-\frac{\partial U}{\partial x} = -2kx - 3hx^2$; l'equazione del moto sarà

$$m\ddot{x} = -2kx - 3hx^2.$$

Prendiamo i valori medi dei due termini della equazione precedente. Se si ammette che la velocità resti limitata, si avrà evidentemente $\bar{x} = 0$. Abbiamo dunque

$$2k\bar{x} + 3A\bar{x} = 0$$

ossia

$$(5) \quad \bar{x} = -\frac{3A}{2k} \bar{x}$$

si vede dunque che l'effetto della non perfetta elasticità del legame, consiste nel rendere differente da zero il valore medio dell'ascissa, ossia nel produrre uno spostamento della posizione media della particella. È chiaro come un ragionamento di questo genere sia suscettibile di essere esteso al caso di un reticolato atomico, e si capisce dunque come avviene che l'agitazione termica ha per effetto una dilatazione delle sostanze. Osserviamo ancora che dalla eguaglianza (5) risulta \bar{x} proporzionale a \bar{x}^2 , cioè in prima approssimazione alla energia del movimento; avremo dunque che la dilatazione termica sarà proporzionale alla energia termica del corpo. E questo si verifica in realtà, perchè l'esperienza dimostra che il calore specifico, e il coefficiente di dilatazione termica hanno, in funzione della temperatura, un andamento del tutto simile.

La non completa elasticità del legame tra atomo e atomo, in un corpo solido presenta una notevole importanza per la spiegazione della conduzione termica degli isolanti, della piroelettricità, e di parecchi altri fenomeni. La ristrettezza del tempo ci vieta però di occuparci di questi argomenti.

Vogliamo invece accennare rapidamente agli studi che sono stati fatti sulla natura delle forze che agiscono tra atomo e atomo. Questo studio, dovuto principalmente all'opera di Boux e della sua scuola, ha condotto fino ad ora a risultati definitivi solo per il caso delle sostanze a struttura salina. La ragione di questo, dipende dal fatto che nei corpi non salini, si hanno, secondo ogni probabilità, degli elettroni che migrano da un atomo all'altro descrivendo delle orbite intrecciate; ne segue in questo caso una straordinaria complicazione delle forze interatomiche, che fino ad ora sono restate indecifrabili.

I reticolati cristallini dei sali sono invece costituiti da ioni i quali, anche come costituenti del cristallo, conservano

tuttavia sempre la loro individualità. Se per esempio consideriamo un pezzo di salgemma, il suo reticolato cristallino è costituito da ioni positivi di sodio disposti alternativamente con ioni negativi di cloro. Ora un ione di sodio è costituito da un nucleo positivo con carica undici volte maggiore di quella dell'elettrone, circondato da dieci elettroni negativi, così che il complesso ha una carica negativa di grandezza eguale a quella dell'elettrone. A grande distanza dallo ione la forza elettrica da esso prodotta sarà dunque con grande approssimazione eguale a quella di una carica puntiforme positiva, mentre molto vicino allo ione il suo potenziale elettrico dipenderà fortemente anche dalla sua struttura complessa. Lo ione negativo di cloro, è invece costituito da un nucleo positivo con carica 17 volte quella dell'elettrone, circondato da 18 elettroni. A grande distanza il suo potenziale elettrico sarà dunque quello di una carica puntiforme negativa, mentre molto vicino si fa sentire anche in questo caso la influenza della struttura complessa. Se ora supponiamo di porre un ione di cloro e uno di sodio in presenza uno dell'altro, si avrà che fino a che sono molto lontani essi si attireranno come due cariche puntiformi, una positiva e una negativa, con la legge di Coulomb; quando poi i due ioni si avvicinano molto la forza che agisce tra di essi dipenderà in modo essenziale dalla disposizione degli elettroni. Pur non potendosi in questo caso, fare un calcolo esatto della forza agente tra i due ioni, per la nostra ignoranza dei dettagli della loro struttura elettronica, si può tuttavia prevedere che quando gli elettroni che circondano i due ioni vengono ad avvicinarsi moltissimo, la forza repulsiva tra di essi finirà ad un certo punto per prevalere, di modo che nella immediata vicinanza i due ioni si respingeranno. La forza che agisce tra i due ioni può dunque venir rappresentata come la somma di una forza attrattiva inversamente proporzionale al quadrato della distanza, e di una forza repulsiva che acquista valori assai grandi quando i due ioni si trovano vicinissimi uno all'altro, e decresce rapidissimamente con la distanza.

Una brillante conferma sperimentale di queste vedute si ha nel calcolo dell'energia che tiene insieme un reticolato di ioni. Le esperienze di LAUE, BRAGG e altri sopra i fenomeni di diffrazione dei raggi Röntgen hanno infatti permesso in

questi ultimi tempi di determinare esattamente la posizione degli atomi nei reticolati cristallini di numerose sostanze. Calcoli assai laboriosi permettono allora di calcolare l'energia potenziale delle forze interatomiche, la quale non è altro che l'energia che è necessaria per separare il cristallo negli ioni che lo costituiscono, e può essere anche misurata direttamente. La concordanza tra i valori misurati e calcolati di questa energia si è dimostrata praticamente perfetta. Questa conferma, come pure il successo ottenuto nel calcolo della compressibilità e delle altre costanti elastiche dei sali, hanno ormai messa fuori di dubbio la natura elettrica delle forze che tengono insieme gli atomi di queste sostanze.

ENRICO FERMI

Sulle denominazioni e sui simboli relativi all'operazione di divisione. (1)

Nel n. 1 del vol. I del *Periodico di Matematica* il professor G. FULFANELLI ha osservato come sia conveniente distinguere, nell'insegnamento elementare e normale, le due divisioni che si presentano nei problemi pratici della ricerca del moltiplicando o del moltiplicatore, e ha proposto di chiamare la prima *partizione*, la seconda *misurazione*. Chiude l'articolo col lamentare la confusione che vi è fra le parole *quoziente* e *quoto*.

Nel lodevole intento di togliere questa confusione e di presentare proposte definitive, il prof. D. MEROGLIANO ha inserito sul *Periodico di Matematica* l'anno XIX, fasc. I) un articolo, ricco di citazioni, il quale però non pecca di eccessiva chiarezza, come lo dimostra la chiusa della 1ª parte: «...concludiamo... che il rapporto di due numeri è uguale al loro quoto (cioè lo stesso numero dà il rapporto e il quoto);

(1) Di quest'articolo, scritto nell'agosto 1923, è stata rissandata la pubblicazione per varie cause, fra le quali uno smarrimento del manoscritto.