Riflessioni su un teorema di Steiner

di Antonino Giambò

1. C'è un teorema di geometria elementare che oserei definire "impossibile", non perché non si possa dimostrare bensì perché la sua dimostrazione o, per meglio dire, le sue dimostrazioni – giacché ne esistono tante – sono veramente complicate e difficili da ricostruire, anche quando si conoscono. Tutte sono eseguite con ragionamenti indiretti. Parlo ovviamente delle dimostrazioni condotte per via sintetica, non interessandomi le altre, sviluppate con il supporto della geometria analitica o della trigonometria. Mi domando, allora, se esista del teorema qualche dimostrazione "relativamente semplice" e soprattutto condotta con ragionamento diretto.

In questo articolo intendo soffermarmi per una riflessione su queste cose.

Il teorema è il seguente:

(1) Se due bisettrici di un triangolo sono uguali allora il triangolo è isoscele.

Esso è evidentemente l'inverso di quest'altro teorema:

In un triangolo isoscele le bisettrici degli angoli uguali sono uguali,

e la cui dimostrazione, al contrario dell'altra, è veramente elementare.

Oltre a questi due teoremi, ce ne sono altri simili sulle mediane e le altezze relative ai lati uguali di un triangolo isoscele. Quindi complessivamente 6 teoremi. Ora, nella dimostrazione dei 3 teoremi diretti non ci sono difficoltà di sorta; non ci sono neppure difficoltà nella dimostrazione del teorema inverso relativo alle altezze; qualche intoppo, ma superabile abbastanza facilmente, si incontra in quella del teorema inverso relativo alle mediane. Ma la dimostrazione del teorema inverso relativo alle bisettrici, vale a dire il teorema (1), veramente mette in crisi gente navigata.

Occorre dire che tutti questi teoremi non figurano negli *Elementi* di Euclide. Non figurano neppure in testi pubblicati nella prima metà dell'Ottocento, per lo meno in Italia [(1)]. Non saprei dire quando comparvero esattamente. Mi risulta che nei testi di Geometria della prima metà del Novecento figuravano, ancorché sotto forma di esercizi, i 3 teoremi diretti. Sembra certo inoltre che la formulazione del teorema (1) sia comparsa per la prima volta nel 1840, quando venne proposta dal matematico tedesco Daniel Christian Ludolf Lehmus (1780-1853). Questi ne fornì la dimostrazione una decina di anni dopo, ma nel frattempo, esattamente nel 1844, un altro matematico, lo svizzero Jakob Steiner (1796-1863), aveva dimostrato il teorema.

Per questo il teorema è citato quasi sempre come ***teorema di Steiner-Lehmus***.

Sia la dimostrazione di Steiner sia quella di Lehmus sono dimostrazioni indirette, così come sono dimostrazioni indirette le altre dimostrazioni che sono seguite, sviluppate in termini di geometria sintetica.

2. Riproduco quella che potrebbe essere la dimostrazione di Steiner, riportata comunque anni dopo da altri studiosi. Ad essa ne farò seguire un'altra, ispirata ad una dimostrazione del matematico inglese Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003), comparsa nel 1967. Si può costatare come entrambe non siano semplicissime né facili da ricostruire anche dopo che se ne ha avuto conoscenza, quantunque la seconda sia oggettivamente più semplice della prima, a condizione però che si siano dimostrate altre proprietà non sempre semplici ed immediate.

- Prima dimostrazione.

Considerato il triangolo ABC, siano BD e CE le due bisettrici uguali (figura 1). Se fosse $BE=CD$ i due triangoli BCD e CBE sarebbero uguali e, di conseguenza, sarebbero uguali gli angoli $B\hat{C}D$ e $C\hat{B}E$ ed il triangolo ABC sarebbe isoscele sulla base BC.

Basta perciò dimostrare che è $BE=CD$ per concludere che il triangolo ABC è isoscele. Lo facciamo ragionando per assurdo, dimostrando che non può essere né $BE>CD$ né $CD>BE$.

Supponiamo dapprima che sia $BE>CD$ e facciamo vedere che si cade in un assurdo.

Nei due triangoli BCE e CBD, aventi due lati ordinatamente uguali (BC in comune e $CE=BD$), avendo ipotizzato che sia $BE>CD$ risulta $B\hat{C}E>C\hat{B}D$ (Euclide, *Elementi*, I, 25).

[1] È così per il testo *Elementi di Algebra e Geometria* del Cav. Brunacci, Bologna, Monti Editore, 1849. In realtà, questo testo è un'edizione riveduta e ampliata da altri autori, di un libro che Vincenzo Brunacci (1768-1818) pubblicò nel 1809.

Costruiamo ora il punto F in modo che il quadrilatero convesso BDFE sia un parallelogramma e uniamo F con C.

Osserviamo subito che, essendo EC=BD per ipotesi ed EF=BD perché lati opposti di un parallelogramma, risulta EF=EC, per cui anche $E\hat{C}F = E\hat{F}C$.

Si ha poi $D\hat{B}E = E\hat{F}D$ perché angoli opposti di un parallelogramma e $E\hat{C}A > D\hat{B}E$ dal momento che $E\hat{C}A = B\hat{C}E$ e $D\hat{B}E = C\hat{B}D$ e inoltre, come già visto, $B\hat{C}E > C\hat{B}D$. Risulta pertanto $E\hat{C}A > E\hat{F}D$.

Poiché inoltre BE>CD e BE=DF, risulta DF>CD e, di conseguenza, $D\hat{C}F > D\hat{F}C$ (Euclide, *Elementi*, I, 18).

Cosicché, sommando membro a membro le due disuguaglianze $E\hat{C}A > E\hat{F}D$ e $D\hat{C}F > D\hat{F}C$, risulterebbe: $E\hat{C}A + D\hat{C}F > E\hat{F}D + D\hat{F}C$, ossia: $E\hat{C}F > E\hat{F}C$.

Conclusione che contraddice ciò che si è stabilito prima e cioè che sia $E\hat{C}F = E\hat{F}C$.

Quindi non può essere BE>CD, giacché altrimenti, come dimostrato, si cadrebbe in un assurdo.

In modo analogo si esclude che possa essere CD>BE.

Rimane in piedi l'unica possibilità che sia BE=CD e quindi il triangolo ABC è isoscele.

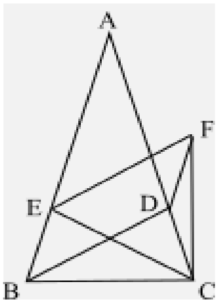

figura 1

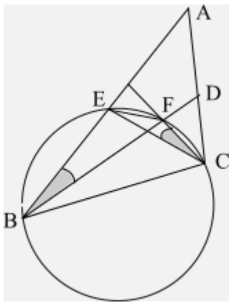

figura 2

- Seconda dimostrazione.

Il teorema, tenendo presente che ogni triangolo che ha uguali due angoli è isoscele, può essere enunciato in questo modo:

(1') *Se due bisettrici di un triangolo sono uguali allora sono uguali gli angoli bisecati*.

Basta quindi dimostrare questo teorema.

In realtà, è più conveniente dimostrare il suo contronominale [(2)], ad esso equivalente:

(1") *Se due angoli di un triangolo non sono uguali allora le bisettrici di tali angoli non sono uguali*.

Dimostrazione.

Dato il triangolo ABC, sia $A\hat{B}C \neq A\hat{C}B$ e, in particolare: $A\hat{B}C < A\hat{C}B$ (figura 2 – poco cambia se si suppone $A\hat{B}C > A\hat{C}B$). Siano poi BD e CE nell'ordine le bisettrici di questi due angoli. Vogliamo dimostrare che risulta $BD \neq CE$.

Tracciamo la semiretta di origine C – situata nel semipiano individuato dalla retta BC e contenente il punto D – in modo che, detto F il punto in cui essa interseca BD, l'angolo $E\hat{C}F$ risulti uguale all'angolo $A\hat{B}D$. In base a ciò, possiamo affermare che i punti B, C, F, E sono situati su una medesima circonferenza.

Questo perché il quadrilatero BCFE è un quadrilatero ciclico in quanto sono uguali gli angoli $E\hat{B}F$ e $E\hat{C}F$, sotto i quali è visto il lato EF opposto ad essi. [Per la dimostrazione di questa proprietà vedere il riquadro sottostante].

Allora, con riferimento alla circonferenza suddetta, fermiamo l'attenzione sulle corde BF e CE, la prima sottesa dall'angolo $B\hat{C}F$ e la seconda dall'angolo $E\hat{B}C$.

Siccome: $E\hat{B}C < A\hat{C}B \Longrightarrow \frac{1}{2} E\hat{B}C < \frac{1}{2} A\hat{C}B$, e inoltre $E\hat{B}C = \frac{1}{2} E\hat{B}C + \frac{1}{2} E\hat{B}C$, allora risulta:

$$E\hat{B}C < \frac{1}{2} A\hat{B}C + \frac{1}{2} A\hat{C}B,$$

---

[2] Si ricorda che, date due proposizioni A e B e indicate con $\overline{A}$ e $\overline{B}$ le loro opposte, l'implicazione $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ si denomina *contronominale* dell'implicazione $A \rightarrow B$ e le due proposizioni $A \rightarrow B$ e $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ sono equivalenti, nel senso che se è vera l'una allora è vera l'altra e se è falsa l'una è falsa l'altra.

ossia, tenendo presente che $\frac{1}{2}A\hat{B}C=E\hat{B}F=E\hat{C}F$ e $\frac{1}{2}A\hat{C}B=E\hat{C}B$, risulta: $E\hat{B}C < E\hat{C}F+E\hat{C}B$, e infine:

$$E\hat{B}C < B\hat{C}F\,.$$

Di conseguenza, tenendo presente che, di due angoli alla circonferenza, ad angolo maggiore corrisponde corda maggiore (cosa che si dimostra facilmente [3]), risulta CE<BF. E a più forte ragione CE<BD, essendo BF<BD. Resta così dimostrato ciò che si voleva dimostrare e cioè che BD≠CE.

Teorema [neppure questo teorema figura negli *Elementi* di Euclide].

Se sono uguali gli angoli sotto i quali il lato di un quadrilatero è visto dai due vertici opposti ad esso, allora il quadrilatero è un quadrilatero ciclico.

Dimostrazione.

Sia il quadrilatero ABCD nel quale siano uguali gli angoli $A\hat{C}B$ e $A\hat{D}B$, sotto i quali è visto il lato AB dai due vertici C e D di questi angoli (figura 3). Vogliamo dimostrare che si tratta di un quadrilatero ciclico, vale a dire che i suoi vertici sono situati su una medesima circonferenza.

Consideriamo al riguardo la circonferenza passante per i punti A, B, C e dimostriamo che passa per D.

Ragioniamo per assurdo.

Se la circonferenza non passasse per D, la retta BD la intersecherebbe in un punto D_1 che sarebbe o interno al segmento BD (figura 3) o situato sul prolungamento di BD dalla parte di D (figura 4).

Nel primo caso, sarebbe $A\hat{D}_1B=A\hat{C}B$, trattandosi di due angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AB. Si costata, nel medesimo tempo, che l'angolo $A\hat{D}_1B$ è un angolo esterno del triangolo ADD_1, per cui si ha: $A\hat{D}_1B>A\hat{D}D_1$ (Euclide, *Elementi*, I, 16) e perciò $A\hat{D}_1B>A\hat{C}B$.

Quindi dovrebbe essere contemporaneamente $A\hat{D}_1B=A\hat{C}B$ e $A\hat{D}_1B>A\hat{C}B$. Il che è manifestamente assurdo.

Dunque D_1 non può essere interno al segmento BD.

Ragionando allo stesso modo, si dimostra che D_1 non può trovarsi all'esterno di tale segmento.

Ne consegue che deve coincidere con D. E, pertanto, la circonferenza passante per A, B, C, passa anche per D. Come dire che il quadrilatero ABCD è un quadrilatero ciclico. [c.v.d.]

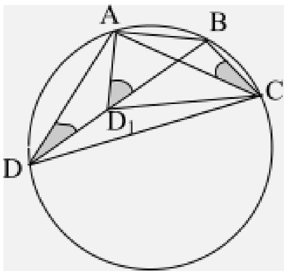

figura 3

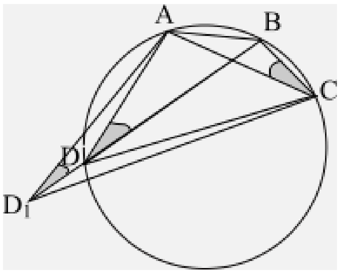

figura 4

3. Rimane da stabilire se esistano dimostrazioni "semplici" e soprattutto "dirette" del teorema. Per la verità, ce ne sono diverse, ma nessuna di esse è convincente. Ne ho scelte due e le vado a descrivere.

- La prima, firmata Amerigo Bottari, è stata pubblicata su Periodico di Matematiche (N° 3 / 1955), assieme a molte considerazioni interessanti sulla questione. Qui mi limito a riportare la dimostrazione del teorema, fedelmente a parte qualche differenza non sostanziale.

Ecco allora la dimostrazione di Bottari.

Sia ABC un triangolo, di cui le bisettrici BD e CE si suppongono uguali (figura 5). Si descrivono due circonferenze: una circoscritta al triangolo ABD e l'altra circoscritta al triangolo AEC, le quali saranno certamente uguali. Avendo esse in comune il punto A e non potendo essere tangenti, avranno anche in comune il punto A', suo simmetrico rispetto alla retta che ne contiene i centri. La corda AA' ad esse comune dovrà contenere il punto P d'incontro delle due bisettrici BD e CE. I triangoli AA'E e AA'D saranno uguali e in particolare sarà AE=AD. Allora risulteranno pure uguali i triangoli APE e APD e quindi sarà pure EP=DP e così risulterà BP=CP, perché differenze di segmenti uguali. Essendo pertanto il triangolo BPC isoscele sulla base BC si avrà

[3] Per la cronaca, neppure questo teorema figura negli *Elementi* di Euclide.

$P\hat{B}C = P\hat{C}B$ e quindi $2\ P\hat{B}C = 2\ P\hat{C}B$, ossia $A\hat{B}C = A\hat{C}B$, cioè il triangolo ABC è isoscele, come si voleva dimostrare.

A mio modesto avviso, non è convincente le parte evidenziata in rosso, sulla quale si regge tutta la dimostrazione. Infatti, che le due circonferenze siano uguali non è per nulla evidente e perciò va dimostrato. Cosa di per sé non banale e comunque non possibile con ragionamento diretto.

Ci sarebbe da obiettare anche sull'affermazione che la corda AA′ contenga il punto P comune alle due bisettrici BD e CE: si suppone infatti una sorta di simmetria non dimostrata.

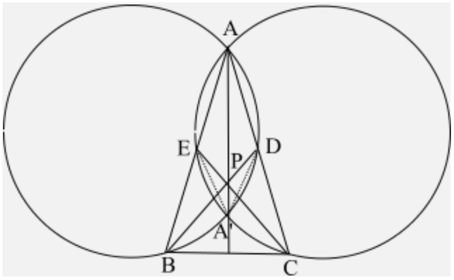

figura 5

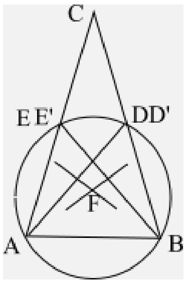

figura 6

- La seconda è ricavata dal sito www.giovannischioppo.it . La riporto fedelmente, a parte qualche dettaglio.

Dimostrazione.

AD e BE sono le bisettrici uguali del triangolo relative ai vertici A e B (figura 6).

Basta provare che $C\hat{A}B = C\hat{B}A$. A questo proposito si tracciano la circonferenza passante per i punti A, E, D e quella passante per i punti B, D', E'. Se le due circonferenze fossero tra loro secanti E non coinciderebbe con E' e D non coinciderebbe con D'; poiché tali coppie di punti coincidono per costruzione, allora le due circonferenze, non potendo essere secanti, risultano coincidenti. A questo punto, tracciati gli assi delle bisettrici AD e BE, si osserva che la loro intersezione F è il centro dell'unica circonferenza passante per A, B, D, E e perciò è equidistante da questi punti. Gli angoli $E\hat{A}D$ e $E\hat{B}D$, insistendo sullo stesso arco ED, sono uguali. Di conseguenza sono uguali gli angoli $C\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$, e pertanto il triangolo ABC è isoscele. [c.v.d.]

Di nuovo, la parte evidenziata in rosso, che è quella su cui si regge la dimostrazione, non mi convince. Il discorso arzigogolato sulle coppie di punti D, D' ed E, E' non nasconde il fatto che, in sostanza, le due circonferenze passano entrambe per i punti D ed E. Ed allora, perché non possano essere secanti? Se dico che sono secanti proprio nei punti E e D, come posso essere smentito? Insomma, sulla base del ragionamento su esposto non è possibile concludere che le due circonferenze coincidono. Per dimostrarlo bisogna trovare altre strade.

Per concludere, devo ancora conoscere una dimostrazione semplice e diretta del teorema di Steiner-Lehmus, ovviamente, ribadisco, sviluppata in termini di geometria sintetica. Ma temo di non poter avere questa soddisfazione. C'è chi sostiene addirittura che una dimostrazione siffatta sia impossibile. In particolare, pare che abbia dimostrato questo fatto il matematico inglese Jonh Horton Conway (1937-2020), morto l'11 aprile scorso, in seguito a contagio da COVID-19.

Non conosco la dimostrazione di Conway, ma mi viene pensato, francamente, che se una dimostrazione "semplice e diretta" del teorema di Steiner-Lehmus esistesse, probabilmente l'avrebbe trovata Steiner, ritenuto il più grande geometra dai tempi del greco Apollonio Pergeo (III sec. a.C.), che invece si è limitato ad una dimostrazione indiretta e non propriamente semplice.