PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da $f(x) = \frac{ax+b}{x^2}$ e $x \neq 0$.

1. Si determinino a e b affinché il grafico di $f(x)$ abbia il massimo relativo nel punto $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ e sia Γ il grafico corrispondente.
2. Si disegni Γ e si esprima, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente a Γ nel punto d'intersezione con l'asse x, forma con la direzione positiva dello stesso asse.
3. Si calcoli l'area della regione R del piano delimitata da Γ, dall'asse x e dalle rette $x = 1$ e $x = 4$.
4. Si consideri la funzione $e^{f(x)}$. Qual è l'andamento del suo grafico? Si illustri il ragionamento seguito.

PROBLEMA 2

Sia F la famiglia di curve definite da $f(x) = x^3 + ax^2 - 2ax - 4x$ con a parametro reale.

1. Si provi che esistono due punti del piano per cui passano tutte le curve di F.
2. Sia $g(x)$ l'equazione della curva Γ di F che ha il minimo relativo nel punto (2,0) ; si rappresenti Γ provando altresì che i suoi punti di massimo e minimo relativi sono allineati col flesso.
3. Si disegni il grafico di $g(|x|)$ e di $|g(x)|$
4. La regione R del piano delimitata da Γ e dall'asse x è la base di un solido W le cui sezioni con piani paralleli all'asse y sono tutti rettangoli di altezza 4. Si trovi il volume di W.

QUESITI

1. Si dica del numero e di Nepero. In particolare, perchè è così importante in matematica e come se ne può deterrninare il valore con la precisione voluta.
2. Si risolva l'equazione:

$$cos2x = 2senx$$

3. Si consideri la corrispondenza f che al numero reale x associa $f(x) = 3arctgx - arctg\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$. La corrispondenza f è una funzione? Se sì, quale ne è il dominio? Cosa si può dire della sua derivata? la funzione è costante?
4. Sia S un settore circolare di raggio r e angolo α, $0 < \alpha < 2\pi$. Si trovi il valore di α, in radianti, per cui il rapporto tra l'area di S e il quadrato del suo perimetro è massimo.
5. Sia dato nel piano α il triangolo ABC retto in A. Si dimostri che il luogo dei punti dello spazio equidistanti da A,B e C è la retta perpendicolare ad α e passante per il punto medio di BC.

6. Si dimostri che la media geometrica di due numeri positivi non è mai superiore alla loro media aritmetica.
7. Sia R la regione delimitata da $y = 6\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$. Si calcoli il volume del solido generato da R nella rotazione attorno alla retta $x = -1$
8. Si mostri che l'equazione $ln(lnx) = 5$ ha una sola radice e se ne dia il valore arrotondato alla terza cifra decimale.