Prima definizione di ellisse

Dati nel piano due punti $\boldsymbol{F_1}$e $\boldsymbol{F_2}$, eventualmente coincidenti, detti fuochi , e assegnato un numero reale $\boldsymbol{a}$ positivo, maggiore della semidistanza dei due fuochi, l'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante, e uguale a 2a, la somma delle distanze dai due punti $\boldsymbol{F_1}$e $\boldsymbol{F_2}$.

Secondo le notazioni correnti, $2c$ è la distanza tra i due fuochi, e è l'eccentricità definita come rapporto $\frac{c}{a}$.

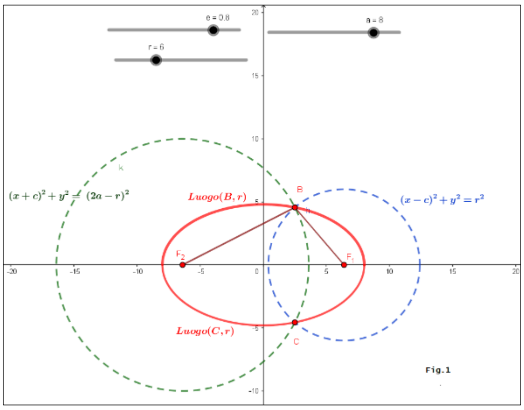
Fissati i valori di c e di a , entrambi positivi, indicati con F_1e F_2 i due fuochi, la condizione del luogo geometrico corrisponde a

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} \ = \ 2a$$

che si traduce, in un riferimento cartesiano avente l'asse x coincidente con la retta congiungente i due fuochi e con l'origine nel punto medio del segmento $F_1\ F_2$, nelle relazione

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} \ = 2a$$

Costruzione dell'ellisse col metodo del giardiniere (simulazione con Geogebra) (Fig.1)
Sono stati utilizzati tre slider, rispettivamente per l'eccentricità, per il semiasse maggiore e per il raggio di una delle due circonferenze ausiliarie: $0 \le e \le 1 \quad 0 < a \le 10 \quad a - c \le r \le 2a$



Quesito 1.
Dati nel piano due punti $\boldsymbol{F_1}$e $\boldsymbol{F_2}$, assegnato un numero reale $\boldsymbol{a}$ positivo si vuole determinare il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante, e uguale a 2a, la somma delle distanze dai due punti $\boldsymbol{F_1}$e $\boldsymbol{F_2}$.

a)Verificare, ragionando sulle proprietà geometriche della figura, che affinché il luogo esista, deve risultare $\boldsymbol{0 \le c \le a}$.

Se P non appartiene alla retta congiungente i due punti $F_1\ F_2$, è sempre
$\overline{F_1\ F_2} < \overline{PF_1} + \overline{PF_2} \to 2c < 2a \to c < a$ *(disuguaglianza triangolare).*
Il luogo è un'ellisse .

Se c=0 i due fuochi sono coincidenti e si ottiene una circonferenza che è una particolare ellisse con eccentricità nulla

Se $c = a$, l' uguaglianza è soddisfatta solo dai punti del segmento $F_1\ F_2$, esclusi in partenza dalla nostra definizione di ellisse.

b) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2+\boldsymbol{y}^2} + \sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})^2+\boldsymbol{y}^2} \ = \boldsymbol{2a} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

La prima equazione, dopo aver sostituito il valore y=0, si può scrivere nella forma:
$|x-a| + |x+a| \ = 2a$ *che è soddisfatta da tutti e soli i valori di x tali che* $-a \le \ x \le \ a$

Questo risultato prova ulteriormente che, se c=a, i punti del segmento $\overline{F_1 F_2}$ soddisfano l'equazione del luogo geometrico.

Qual è l'equazione del luogo geometrico *nel caso in cui c=a ?*
$y^2 = 0$ con le condizioni $-a \leq x \leq a$ $determinate\ precedentemente$

Quesito 2. (*a risposta multipla)*
L'equazione $\mathbf{y^2 = 0}$ che rappresenta una coppia di rette coincidenti con l'asse x

- ☐ è un'ellisse degenere
- ☐ è una parabola degenere
- ☐ è un'iperbole degenere
- ☐ non è una conica

Il quesito 2 dovrebbe avviare una discussione sulla opportunità di scelta di alcune definizioni.
Se avessimo scelto per l'ellisse una definizione meno restrittiva , in modo da includere il caso in cui risulti c=a, il segmento $F_1\ F_2$ sarebbe un'ellisse, seppur degenere, ma il risultato non sarebbe stato coerente con la classificazione delle coniche, per cui all'eccentricità unitaria corrisponde una parabola.
Si può osservare come anche in corrispondenza ad altre definizioni o costruzioni dell'ellisse compaia come caso limite un coppia di rette coincidenti o parallele e come la discussione vada sempre contestualizzata.

Sorge anche il problema della definizione generale di conica dal punto di vista analitico come curva algebrica del secondo ordine.