Seconda definizione di ellisse

L'ellisse è la trasformata di una circonferenza mediante una contrazione o una dilatazione (casi particolari di affinità)

Costruzione dell'ellisse mediante due circonferenze concentriche (Fig.2)

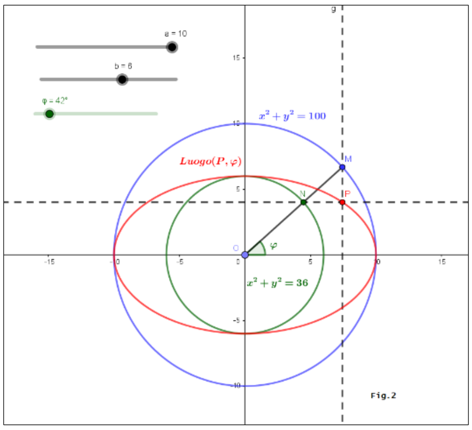

Fig.2

Il punto M della circonferenza di raggio maggiore

ha coordinate $(a \cos\varphi\,; a \sin\varphi)$

Il punto N della circonferenza di raggio minore

ha coordinate $(b \cos\varphi\,; b \sin\varphi)$

Il punto P di coordinate $(a \cos\varphi\,; b \sin\varphi)$ descrive un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ la cui eccentricità è $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

Quesito 3.

La nota costruzione dell'ellisse, per punti, mediante due circonferenze di raggi rispettivamente uguali ai suoi semiassi , può essere interpretata come una trasformazione di coordinate.

Di che tipo di trasformazione si tratta? Discutere i casi

- **a=b**
- **b=0**
- **a tendente a infinito**

Sia $x^2+\ y^2=a^2$ *la circonferenza di raggio maggiore, in forma parametrica* $\begin{cases} x= & a\cos\varphi \\ y= & a\ \sin\varphi \end{cases}$

e $x^2+\ y^2=b^2$ *la circonferenza di raggio maggiore , in forma parametrica* $\begin{cases} x= & b\cos\varphi \\ y= & b\ \sin\varphi \end{cases}$

E' facile verificare che l'ellisse di equazione $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$,

si ottiene applicando la contrazione $\begin{cases} X= & x \\ Y= & \frac{b}{a}\,y \end{cases}$ *alla circonferenza di raggio maggiore ,*

oppure la dilatazione $\begin{cases} X= & \frac{a}{b}x \\ Y= & y \end{cases}$ *alla circonferenza di raggio minore*

Se a = b i due cerchi coincidono e si trasformano ancora in se stessi in quanto la trasformazione si riduce all'identità.

Se b=0, il valore di l'eccentricità *tende a 1,la circonferenza di raggio b tende ridursi al solo punto O , nel quale va a coincidere , pertanto, il punto N.*

Il punto P, la cui ordinata tende a 0 , descriverà il segmento di estremi (-a;0) e (a;0)

Se si mantiene fisso il raggio b del cerchio minore e si fa crescere indefinitamente il raggio a del cerchio maggiore, essendo $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$, l'eccentricità tende a 1 .

In questo caso il luogo è *un'ellisse sempre più allungata la cui posizione limite è una coppia di rette parallele (parabola degenere)*

In entrambi i casi perde di significato la trasformazione affine che mette in corrispondenza la circonferenza e l'ellisse, pertanto si tratta di casi limite. ben lontani dal caso generale.