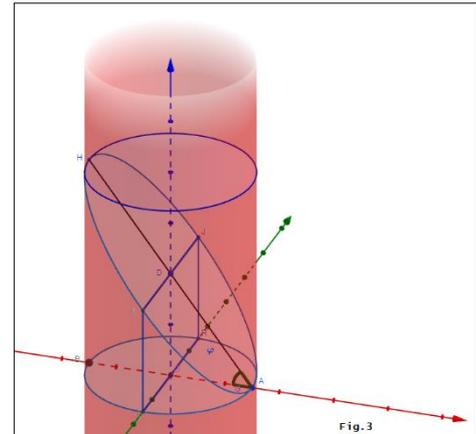


### Terza definizione di ellisse

L'ellisse è la proiezione parallela di una circonferenza (genesì spaziale di una trasformazione affine nel piano) (Fig.3)



**Quesito 4.** Le possibili intersezioni di una superficie cilindrica rotonda con un piano non parallelo alle generatrici sono ellissi o circonferenze. Una circonferenza di raggio  $r$ , sezione ottenuta con un piano  $\pi$  ortogonale all'asse, si proietta in un'ellisse su un piano non parallelo, nè ortogonale a  $\pi$ .

Dimostrare che l'eccentricità dell'ellisse è uguale a  $\sin \varphi$ , essendo  $\varphi$  l'angolo dei due piani

Discutere i casi  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

L'ellisse avrà semiasse minore uguale a  $r$  e semiasse maggiore  $\frac{r}{\cos \varphi}$

$$\text{Il rapporto } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{r\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{r \cos \varphi} \cos \varphi = \sin \varphi$$

Se  $\varphi = 0$  si ritrova una sezione circolare e la sua eccentricità è nulla (caso particolare)

Se  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  il piano è parallelo alle generatrici del cilindro e non si può però parlare di un caso particolare di proiezione.

La sezione è una coppia di rette parallele eventualmente coincidenti.

### Una definizione alternativa di ellisse

#### Quesito 5

Fissati due punti  $F_1$  e  $F_2$  si disegni una circonferenza di centro in  $F_1$  e raggio  $2a$  maggiore della distanza  $\overline{F_1 F_2}$

Preso un punto  $A$  sulla circonferenza si traccino la retta  $F_1 A$  e l'asse del segmento  $F_2 A$  e si indichi con  $P$  il loro punto di intersezione (che esiste sempre come è facile interessante dimostrare)

Al variare di  $A$  sulla circonferenza  $P$  descrive un luogo geometrico che chiamiamo ellisse di fuochi  $F_1$  e  $F_2$  e asse maggiore uguale a  $2a$ .

Confrontare la precedente definizione con quella <<del giardiniere>>

Le due definizioni sono equivalenti?

Cosa si può dire del caso limite  $\overline{F_1 F_2} = 2a$ ?

La risposta è affermativa in quanto il punto  $P$ , per costruzione, soddisfa la condizione

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PA} = 2a$$

Se i due fuochi coincidono il luogo descritto è una circonferenza di centro  $F_1$  e raggio  $a$

Se definiamo, anche in questo caso, l'eccentricità come rapporto tra la distanza focale e la lunghezza dell'asse maggiore, se questo rapporto tende a 1, l'ellisse risulta sempre più schiacciata.

Se però analizziamo la posizione limite, vediamo che ora  $F_2$  appartiene alla circonferenza e l'asse del segmento  $F_2 A$  può incontrare il raggio  $F_1 A$  solo nel centro del cerchio: il luogo è costituito dall'unico punto  $F_1$ .

In effetti, anche in questo caso il luogo geometrico dovrebbe corrispondere alla retta  $F_1 F_2$  contata due volte, ma c'è un vincolo ancora più forte per il punto  $P$ , quello di appartenere alla retta  $F_1 A$ , che lo riduce al solo punto  $F_1$ .