

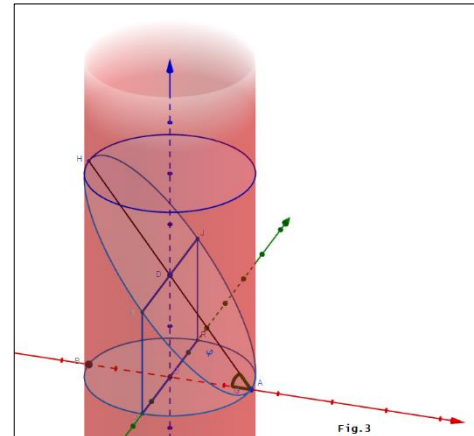
Terza definizione di ellisse

L'ellisse è la proiezione parallela di una circonferenza (genesì spaziale di una trasformazione affine nel piano) (Fig.3)

Quesito 4. Le possibili intersezioni di una superficie cilindrica rotonda con un piano non parallelo alle generatrici sono ellissi o circonferenze. Una circonferenza di raggio r , sezione ottenuta con un piano π ortogonale all'asse, si proietta in un'ellisse su un piano non parallelo, nè ortogonale a π .

Dimostrare che l'eccentricità dell'ellisse è uguale a $\sin \varphi$, essendo φ l'angolo dei due piani

Discutere i casi $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$



L'ellisse avrà semiasse minore uguale a r e semiasse maggiore $\frac{r}{\cos \varphi}$

$$\text{Il rapporto } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{r\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{r \cos \varphi} \cos \varphi = \sin \varphi$$

Se $\varphi = 0$ si ritrova una sezione circolare e la sua eccentricità è nulla (caso particolare)

Se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ il piano è parallelo alle generatrici del cilindro e non si può però parlare di un caso particolare di proiezione.

La sezione è una coppia di rette parallele eventualmente coincidenti.

Una definizione alternativa di ellisse

Quesito 5

Fissati due punti F_1 e F_2 si disegni una circonferenza di centro in F_1 e raggio $2a$ maggiore della distanza $\overline{F_1 F_2}$

Preso un punto A sulla circonferenza si traccino la retta $F_1 A$ e l'asse del segmento $F_2 A$ e si indichi con P il loro punto di intersezione (che esiste sempre come è facile interessante dimostrare)

Al variare di A sulla circonferenza P descrive un luogo geometrico che chiamiamo ellisse di fuochi F_1 e F_2 e asse maggiore uguale a $2a$.

Confrontare la precedente definizione con quella <<del giardiniere>>

Le due definizioni sono equivalenti?

Cosa si può dire del caso limite $\overline{F_1 F_2} = 2a$?

La risposta è affermativa in quanto il punto P , per costruzione, soddisfa la condizione

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PA} = 2a$$

Se i due fuochi coincidono il luogo descritto è una circonferenza di centro F_1 e raggio a

Se definiamo, anche in questo caso, l'eccentricità come rapporto tra la distanza focale e la lunghezza dell'asse maggiore, se questo rapporto tende a 1, l'ellisse risulta sempre più schiacciata.

Se però analizziamo la posizione limite, vediamo che ora F_2 appartiene alla circonferenza e l'asse del segmento $F_2 A$ può incontrare il raggio $F_1 A$ solo nel centro del cerchio: il luogo è costituito dall'unico punto F_1 .

In effetti, anche in questo caso il luogo geometrico dovrebbe corrispondere alla retta $F_1 F_2$ contata due volte, ma c'è un vincolo ancora più forte per il punto P , quello di appartenere alla retta $F_1 A$, che lo riduce al solo punto F_1 .