Trigonometria

Problema sul teorema del coseno

Problema (triangolo rettangolo isoscele)

1) Nel triangolo rettangolo isoscele ABC i cateti AB, AC misurano l. Preso sul lato AB il punto D tale che $sen\left(ACD\right)=\frac{3}{5}$, determinare sul segmento CD un punto P in modo che sia verificata la relazione $\overline{CP}^2+\overline{AP}^2+\overline{PB}^2=\frac{31}{20}l^2$. Calcolare la misura di CP.

2) Analizzare la funzione che esprime la somma dei quadrati delle distanze di P dai vertici del triangolo ABC e stabilire per quali posizioni di P la funzione assume il valore massimo ed il valore minimo.

Elaborazioni

1) Facciamo riferimento alla figura riportata a margine per la quale abbiamo indicato con α l'angolo ACD e con $x\geq 0$ la misura del segmento CP.

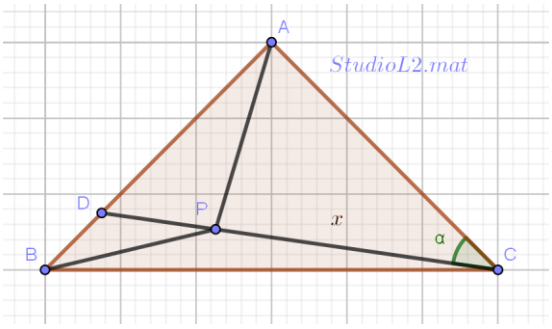

Figura 1- Il triangolo ABC è rettangolo isoscele. Detta *l* la misura dei cateti AC, AB; dall'ampiezza dell'angolo α formato dalla corda CD con AC si ricava che CD=5 *l* /4.

Osserviamo subito che la conoscenza $sen\left(ACD\right)=\frac{3}{5}$ permette di individuare univocamente la posizione della corda CD del triangolo isoscele e quindi la posizione del punto D sul cateto AB. Inoltre, la misura dell'ipotenusa è $\overline{BC}=l\sqrt{2}$.

Per determinare la misura del segmento CP, $\overline{CP}=x$, che verifica la relazione assegnata, esprimiamo in funzione del parametro l e dell'incognita x i valori $\overline{AP}^2$, $\overline{PB}^2$ applicando il teorema del coseno (teorema di Carnot) ai triangoli APC, BPC, dopo aver notato che $BCP=45°-\alpha$ e che con $sen(\alpha)=\frac{3}{5}$ si ha $\cos(\alpha)=\sqrt{1-sen^2(\alpha)}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$.

1) Dal triangolo APC (per il teorema del coseno) possiamo scrivere

$$\overline{AP}^2=\overline{AC}^2+\overline{CP}^2-2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{CP}\cos(\alpha)=l^2+x^2-\frac{8}{5}lx$$

2) Dal triangolo BPC (sempre per lo stesso teorema) possiamo scrivere

$$\overline{PB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CP}^2-2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CP}\cos(45°-\alpha)=\left(l\sqrt{2}\right)^2+x^2-2\cdot l\sqrt{2}x\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}sen\alpha\right)=$$

$$2l^2+x^2-2\cdot l\sqrt{2}x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=2l^2+x^2-\frac{14}{5}lx$$

3) La relazione assegnata $\overline{CP}^2+\overline{AP}^2+\overline{PB}^2=\frac{31}{20}l^2$ assume la seguente forma:

$$x^2+\left(l^2+x^2-\frac{8}{5}lx\right)+\left(2l^2+x^2-\frac{14}{5}lx\right)=\frac{31}{20}l^2$$ che semplificata diventa $$60x^2-88lx+29l^2=0$$

Le radici di quest'equazione sono $x = \frac{44l \pm \sqrt{(44l)^2 - 60 \cdot 29l^2}}{60} = \frac{44l \pm 14l}{60}$; $x_1 = \frac{l}{2}$, $x_2 = \frac{29l}{30}$.

Accettabilità dei valori trovati

I valori sono accettabili se sono non negativi e ciascuno ha valore minore o uguale alla misura della corda CD. Poiché $\overline{CD} = \frac{\overline{AC}}{\cos(\alpha)} = \frac{5}{4}l$, le condizioni sono entrambe soddisfatte, dunque i valori trovati sono accettabili. Il problema presenta pertanto due soluzioni; esistono dunque due posizioni diverse che possono essere assunte dal punto P su CD.

2) (Geometria dinamica con GeoGebra)

Rappresentiamo la funzione che esprime la somma dei quadrati delle misure delle distanze del punto P dai vertici A, B, C del triangolo mentre P si muove sulla corda CD.

Tendendo conto di quanto esposto nella risoluzione del precedente quesito la funzione in oggetto è:

$$s(x) = \overline{PC}^2 + \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = x^2 + \left(l^2 + x^2 - \frac{8}{5}lx\right) + \left(2l^2 + x^2 - \frac{14}{5}lx\right)$$

$= 3x^2 - \frac{22}{5}lx + 3l^2$, con $l \geq 0$ che rappresenta la misura dei cateti del triangolo rettangolo e $\overline{CP} = x$.

Osserviamo che il punto P deve muoversi sulla corda CD e dunque la sua distanza dal vertice C varia dal valore minimo 0 (zero), quando P coincide con C, al valore massimo pari alla misura della corda CD che è: $\overline{CD} = \frac{\overline{AC}}{\cos(\alpha)} = \frac{5}{4}l$.

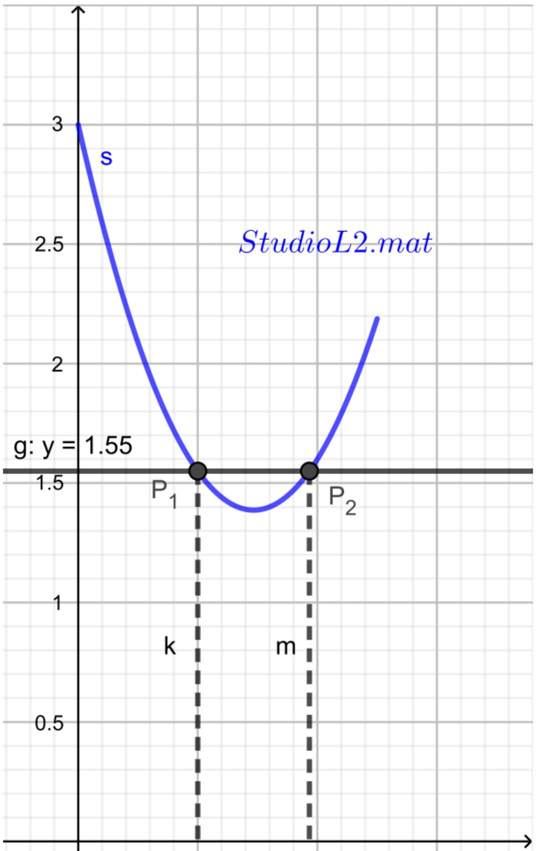

Figura 2- La funzione somma dei quadrati delle distanze di P dai vertici A,B,C del triangolo mentre P varia sulla corda CD assume il valore massimo quando P coincide con C e vale $3l^2$; il valore minimo si ha per $x=11l/15$.

La funzione somma s(*x*) dei quadrati delle distanze di P dai vertici del triangolo ABC è quadratica, quindi il suo diagramma è un arco di parabola con la concavità rivolta verso l'alto (funzione convessa). Dalla rappresentazione grafica riportata in Figura 2 si evince che il valore massimo si ha per *x*=0, quindi quando P coincide con il vertice C. All'aumentare della distanza di P da C la funzione decresce fino a raggiungere il minimo in corrispondenza della distanza *x* coincidente con l'ascissa del vertice V della parabola; per valori maggiori di *x* la funzione cresce (strettamente). Le coordinate di V sono

$$x_V = \frac{11}{15}l \; ; \; y_V = 3\left(\frac{11}{15}l\right)^2 - \frac{22}{5}l \cdot \frac{11}{15}l + 3l^2 = \frac{104}{75}l^2$$

Quindi il valore minimo della funzione somma s(*x*) è $104l^2/75$.