Periodico di Matematiche 4/1930

Varietà e Questioni proposte

Giuoco con tre gruppi di oggetti

Si pongano sulla tavola tre gruppi di oggetti: sassi o cerini ecc. Alternativamente due giuocatori A, B toglieranno oggetti da questi gruppi osservando la seguente regola: si può togliere quanti si vogliono oggetti, purchè si tolgano da un solo gruppo. *Vince quello che arriva a togliere l'ultimo gruppo di oggetti (o l'ultimo oggetto) dalla tavola.*

Trovare con quale metodo il giuocatore A può avere la vincita sicura pur di scegliere chi debba cominciare il giuoco.

Indichiamo con α, β, γ i numeri che indicano quanti oggetti sono rispettivamente nei tre gruppi. Osserviamo che se il giuocatore B ha la mossa, e se dei tre numeri α, β, γ due sono uguali a 1 ed uno è uguale a 0, evidentemente A vince.

Si scrivano i tre numeri α, β, γ in sistema duale e se ne faccia la somma (la somma va eseguita in sistema decimale).

Ad esempio se $\alpha = 13$, $\beta = 7$, $\gamma = 8$ si scriverà:

$$\begin{array}{r} 1101 \\ 111 \\ 1000 \\ \hline 2212 \end{array}$$

Dimostro che:

1) Se le cifre di questa somma così ottenuta non sono tutte pari, si può mediante una sola mossa (cioè levando da un solo gruppo un certo numero di oggetti) renderle tutte pari.

2) Se le cifre di detta somma sono tutte pari, mediante una sola mossa necessariamente almeno una cifra diverrà dispari.

Prima parte - Nella somma ottenuta vediamo quale è la prima cifra dispari che comparisce: essa può essere o un 1 o un 3. Se è un 1 (come accade nell'esempio riportato) essa proviene dalla somma di due cifre uguali a 0 ed una cifra uguale a 1. Quello dei tre numeri α, β, γ che contiene la cifra 1 va cambiato in modo che questo 1 divenga 0: delle successive cifre cambieranno quelle appartenenti a colonne che danno risultati dispari (gli 1 diverranno 0 e gli 0 diverranno 1). In ogni modo il numero così cambiato diminuirà. Nel nostro esempio il numero 111 deve diventare 101, cioè dal gruppo di 7 oggetti se ne toglieranno 2, in modo da ottenere un gruppo di 5 oggetti. Avremo allora

$$\begin{array}{r} 1101 \\ 101 \\ 1000 \\ \hline 2202 \end{array}$$

La somma così ottenuta è composta di tutte cifre pari.

Se la prima cifra dispari della somma è 3 essa proverrà dalla somma di tre cifre uguali a 1: si potrà in tal caso considerare uno a piacere dei tre numeri e cambiarlo opportunamente; la cifra $(=1)$ di questo numero appartenente alla prima colonna che dà il risultato 3, deve diventare 0 e delle altre cifre successive dovranno cambiare quelle appartenenti a colonne che danno risultati dispari.

Esempio: sia $\alpha = 4$, $\beta = 12$, $\gamma = 14$ scriveremo:

$$\begin{array}{r} 100 \\ 1100 \\ 1110 \\ \hline 2310 \end{array}$$

La prima cifra dispari del risultato è 3.

Si può cambiare a piacere uno dei tre numeri, per esempio 100, in modo che la somma venga composta di tutte cifre pari.

100 va cambiato in modo che la sua prima cifra divenga 0, la seconda 1, la terza resti 0. Dal primo gruppo di 4 oggetti se ne toglieranno 2, così 100 si muterà in 10.

Seconda parte - Se la cifre della somma dei tre numeri α, β, γ (scritti in sistema duale) sono tutte pari, diminuendo un solo numero, necessariamente in esso almeno un 1 diverrà 0, ciò che porterà a un risultato dispari nella somma.

In conclusione se la somma dei tre numeri α, β, γ (scritti in sistema duale) non è formata di tutte cifre pari e la mossa è data al giuocatore A, egli potrà rendere pari queste cifre sia nella prima mossa che nelle successive, e poichè il numero totale degli oggetti decresce di mano in mano che il giuoco procede, il giuocatore A si ridurrà alla terna (1, 1, 0) o addirittura alla (0, 0, 0), cioè A vincerà.

Adriana Enriques