SOLUZIONE DI ADRIANA ENRIQUES

SPIEGAZIONI, ESEMPI, APPROFONDIMENTI

Nel fascicolo successivo, n.2/1930 del periodico di Matematiche, è pubblicata la risposta al quesito fornita della stessa autrice, e si rende noto che altre soluzioni sono pervenute da parte dei proff. A . Padoa e A. Barzaghi.

Il metodo di Adriana ha un approccio euristico e poi prosegue con una dimostrazione rigorosa della strategia vincente.

Indicati con A e B i due giocatori, suppone che sia B a iniziare il gioco e analizza le possibili configurazioni dei due gruppi di oggetti, cominciando dalle più semplici..

Ovviamente se in uno dei due gruppi ci sono 0 oggetti oppure se i due gruppi hanno lo stesso numero di oggetti, B può assicurarsi la vittoria in quanto, grazie alle regole del gioco, può arrivare con una sola mossa alla posizione $(0{,}0)$.

Ciascuna delle situazioni $(\boldsymbol{2n}, \mathbf{0})$ $(\mathbf{0}, \boldsymbol{2n})$ $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})$ ***è favorevole a chi deve giocare per primo.***

Considerando invece la situazione $(1{,}2)$, è facile verificare che, qualunque sia la mossa di B, in questo caso sarà il giocatore A a trovarsi in una situazione favorevole, corrispondente ad una delle tre coppie

$$(2{,}0) \qquad (0{,}2) \qquad (1{,}1)$$

La situazione $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ **darà la vittoria ad A qualunque sia la mossa di B.**

A questo punto Adriana afferma che ci sono infinite situazioni, analoghe alla coppia$(1{,}2)$, che danno la vittoria al giocatore A, se il gioco inizia da B, e ne elenca alcune, che riportiamo nello schema di fig.3 (ovviamente si possono considerare tutte le coppie simmetriche, scambiando il primo con il secondo elemento) **. Queste coppie saranno indicate come coppie di classe S.**

Coppie favorevoli ad A se gioca B

Primo gruppo	1	3	4	6	8	9
Secondo gruppo	2	5	7	10	13	15

Differenza	1	2	3	4	5	6

Fig 3

Come si può osservare, il numero di oggetti del primo gruppo e quello del secondo gruppo, costituiscono due successioni crescenti a_n e b_n di numeri interi positivi.

Esse possono essere costruite, a partire dalla prima coppia $(1{,}2)$, in modo ricorsivo con un procedimento a <<zig-zag>>, tenendo conto delle seguenti proprietà:

- P_1 : ogni numero intero positivo compare in un coppia e in una soltanto
- P_2 : deve risultare $a_i - b_i = i \quad \forall i$

OSSERVAZIONI e SPUNTI DI APPROFONDIMENTO

L'algoritmo con cui generare le due successioni può essere così espresso:

$$\begin{cases} a_n = & \text{minimal exclusive } \{a_i; b_i : 0 \le i < n\} \\ b_n = & a_n + n \end{cases}$$

dove con minimal exclusive si indica il più piccolo intero *k* che non è ancora comparso nei i precedenti termini delle due successioni.

Le successioni a_n e b_n sono due particolari successioni di Beatty, introdotte dal matematico Samuel Beatty nel 1926. Si tratta di successioni di interi, associate a un numero irrazionale r , il cui termine generale è $\lfloor nr \rfloor$ (parte intera di r)

Una interessante proprietà delle successioni di Beatty è che se α e β sono irrazionali positivi tali che α+β=1, allora le rispettive successioni di Beatty sono complementari e la loro unione è l'insieme $\mathbb{N}$.

Si può dimostrare che $a_n = \lfloor n\varphi \rfloor$ e $b_n = \lfloor n\varphi^2 \rfloor$, in accordo con la proprietà caratteristica del numero aureo ($\varphi + \varphi^2 = 1$) e con la proprietà P_1 delle due successioni .

Avendo indicato con S la classe delle coppie (a_n, b_n) di questo tipo, Adriana indica con T la classe delle coppie che non appartengono ad S. In seguito, enuncia e dimostra le seguenti proprietà, essenziali per individuare la strategia vincente.

PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DELLE DUE CLASSI S e T

1. **da una posizione della classe S, con una sola mossa, si passa necessariamente a una posizione della classe T.**
2. **da una posizione della classe T, con una sola mossa, è sempre possibile passare a una posizione della classe S.**

Prima parte

a) Se dai due elementi di una coppia della classe S $t$olgo lo stesso numero, troverò due valori, diversi da quelli precedenti, ma aventi la stessa differenza. La nuova coppia , pertanto, non può appartenere alla classe S per la proprietà P_2 .

b) Se la mia mossa consiste nel togliere un certo numero da un elemento di una coppia della classe S , lasciando inalterato l'altro elemento, per la proprietà P_1 passo necessariamente a una coppia della classe T

Seconda parte

Siano a' e b' i numeri di una coppia della classe T e siano a e b i due numeri di una coppia della classe S tali che $a' - b' = a - b$

I. Si osserva che non può essere $a' = a$ altrimenti dovrebbe essere anche $b' = b$ e quindi $(a'\ b')$ apparterrebbe a S contro le ipotesi.

II. Se $a' > a$ anche $b' > b$ e $a' - a = b' - b$. In tal caso, togliendo da a' e b', rispettivamente, le quantità uguali $a' - a$ *e* $b' - b$, si passa mediante una sola mossa dalla coppia $(a'\ b')$ di T alla coppia $(a\ \ b)$ di S.

Esempio

$classe\ T\ \ (4 \quad 6) \rightarrow\ classe\ S\ \ (3 \quad 5)\ \ con\ \ a' - a = b' - b = 1$

III. Se invece $a' < a$ anche $b' < b$.
Consideriamo il minore dei due numeri a' e b' e sia ad esempio a'; esso farà parte di una coppia della classe S ed il suo coniugato sarà necessariamente un numero $\beta < b'$. In tal caso basterà da b' togliere $b' - \beta$ per ricondursi a una coppia della classe S

Esempio

$classe\ T\ \ (2 \quad 7) \rightarrow\ classe\ S\ \ (8 \quad 13)\ \rightarrow\ classe\ S(2 \quad 1)\ \ \ con\ \ b' - \beta = 6$

CONCLUSIONE

La strategia vincente consiste nel mettere sempre l'avversario nella condizione di fare la sua mossa quando i numeri degli oggetti dei due gruppi costituiscono una coppia di classe S.

Se si parte da una coppia della classe *S*, il giocatore A darà la prima mossa a B, il quale passerà a necessariamente a una coppia di classe T.

Se la mossa di B non porterà direttamente a una delle situazioni vincenti

$$(\mathbf{2}\boldsymbol{n}, \mathbf{0}) \qquad (\mathbf{0}, \mathbf{2}\boldsymbol{n}) \qquad (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})$$

il giocatore A riuscirà sempre, con la strategia opportuna, a passare a successive posizioni della classe S, con numeri di oggetti decrescenti , fino a ricondursi alla coppia $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ che, come abbiamo visto , porta necessariamente a una delle posizioni per lui vincenti

$$(\mathbf{2}, \mathbf{0}) \qquad (\mathbf{0}, \mathbf{2}) \qquad (\mathbf{1}, \mathbf{1})$$

Se si parte da una coppia della classe *T*, il giocatore A deciderà di giocare per primo e sceglierà la mossa che porta a una coppia di tipo S.

B necessariamente tornerà alla coppia di classe T , A ripeterà la strategia finché B non sarà costretto a giocare di fronte alla situazione $(1,2)$

ESEMPIO -Fig.4

Si parte da una situazione di classe S.
Il giocatore A decide di giocare per secondo.
Il giocatore B che inizia per primo a giocare, sceglie casualmente la sua mossa, mentre il giocatore A utilizza la strategia e ritorna sempre a una situazione di tipo S.

SITUAZIONE	COPPIA	CLASSE
INIZIALE	(8 13)	S
dopo la mossa di B	(8 11)	T
dopo la mossa di A	(4 7)	S
dopo la mossa di B	(4 6)	T
dopo la mossa di A	(3 5)	S
dopo la mossa di B	(3 4)	T
dopo la mossa di A	(1 2)	S
dopo la mossa di B	(1 1)	T
dopo la mossa di A	(0 0)	VINCE A

FIG.4

UN "ISOMORFISMO" SULLA SCACCHIERA

Intorno alla metà del secolo scorso, il matematico statunitense Rufus P. Isaacs, teorico dei giochi , propose un gioco da scacchiera detto " Corner the queen", la cui struttura e le cui regole sono del tutto equivalenti al gioco di Wythoff.
Si posiziona sulla scacchiera, di lato grande a piacere, solo una regina, in una casella arbitraria.
Due giocatori, a turno, spostano la regina per quanto si vuole , secondo le regole degli scacchi, limitandone però i movimenti a : Ovest, Sud, Sud Ovest,
Vince chi per primo riesce a portare la regina nell'angolo in basso a sinistra.
E' evidente che lo spostamento a sud o a ovest , equivale a togliere un certo numero di oggetti da uno dei due gruppi mentre lo spostamento in diagonale equivale a togliere lo stesso numero di oggetti da entrambi i gruppi. L'analogia è più forte se assegniamo a ciascuna casella una coppia di coordinate intere, come in **(Fig5).**

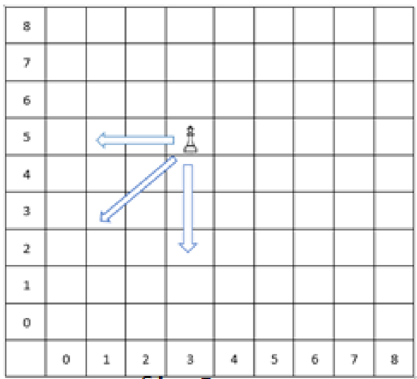

fig.5

Con questo metodo, inoltre si possono determinare graficamente le posizioni che, nella sua soluzione, Adriana Enriques aveva denominato " di classe S" e giustificare più agevolmente l'algoritmo che le genera.

A tale scopo poniamo con un asterisco rosso la casella (0,0) e da lì contrassegniamo con un asterisco azzurro tutte le caselle di ascissa nulla o di ordinata nulla e quelle aventi coordinate uguali tra loro, per cui esiste almeno una mossa che porta direttamente alla meta.

Queste caselle corrispondono alle posizioni $(2n, 0)$ $(0,2n)$ (n, n) favorevoli al giocatore B.

Le prime caselle, a partire dal basso, che restano libere sono quelle di coordinate (1,2) e (2,1), che contrassegniamo con un asterisco rosso; abbiano determinato la prima coppia di classe S, cioè la prima delle posizioni *che daranno la vittoria al giocatore A, sempre dando la mossa a B* ***(Figg. 6 e 7)***

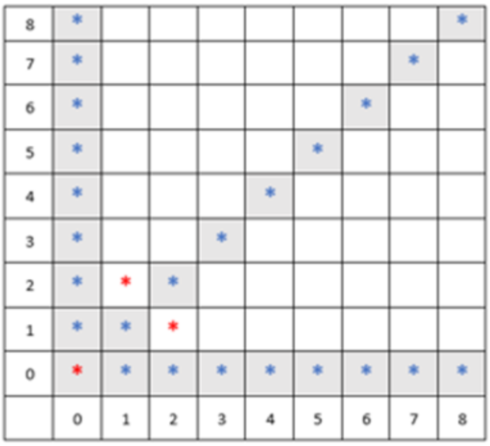

FIG.6

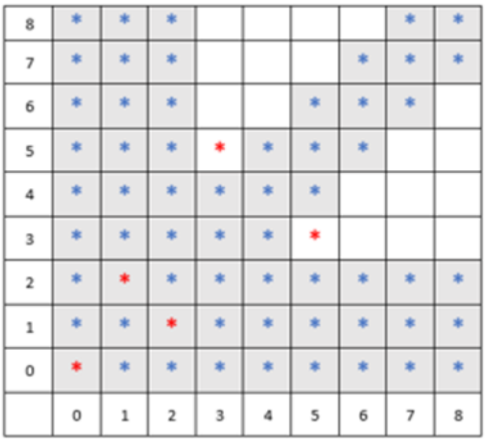

FIG.7

Per determinare le altre procediamo allo stesso modo :a partire dai due asterischi rossi "eliminiamo" le caselle corrispondenti a spostamenti verticali, orizzontali e in diagonale.
Le prime caselle libere sono quelle di coordinate (3,5) e (5,3) : abbiamo determinato la seconda coppia di tipo S e con un procedimento analogo si determineranno le altre.

Giustificando i risultati precedenti possiamo però arrivare a una regola generale.
Tenendo conto della simmetria della figura, possiamo considerare solo le coppie di coordinate in cui l'ascissa sia minore dell'ordinata.
E' chiaro che la coppia successiva a (1,2) deve avere per ascissa 3 , cioè un valore non ancora utilizzato in precedenza, altrimenti ci sarebbe una mossa in verticale che porterebbe alla posizione precedente, di classe S.
L'ordinata, invece ,deve essere 3+2=5 , altrimenti ci sarebbe un movimento in diagonale che porterebbe alla classe S.
La terza coppia di classe S avrà ascissa 4 (per evitare di tornare al caso precedente con un movimento verticale) e ordinata 4+3=7 (per non cadere in uno dei percorsi in diagonale che riportano a una delle caselle già considerate).
Generalizzando la regola, si ritrova la coppia di successioni

$$\begin{cases} x_n = \text{minimal exclusive } \{x_i ; y_i : 0 \le i < n\} \\ y_n = x_n + n \end{cases}$$

dove ora x_n rappresenta l'ascissa e y_n l'ordinata della n-esima casella di tipo S.